

UNIVERSITÉ TOULOUSE III - PAUL SABATIER

# THÈSE

*en vue de l'obtention du titre de*  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

*Spécialité :*  
Météorologie

*par*

Alex DOERENBECHER

## ÉTUDE DE L'OPTIMISATION D'UN SYSTÈME D'OBSERVATION ADAPTATIF POUR AMÉLIORER LA PRÉVISION DES DÉPRESSIONS MÉTÉOROLOGIQUES

*Thèse soutenue publiquement le 21 Juin 2002  
devant le jury composé de :*

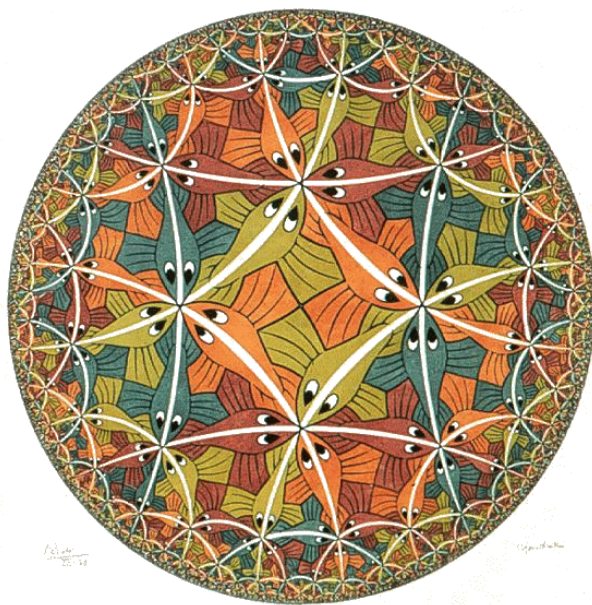
M. Serge CHAUZY	Président du jury
M. François-Xavier LE DIMET	Rapporteur
M. Andrew LORENC	Rapporteur
M. François BOUTTIER	Examinateur
M. François GÉRARD	Examinateur
M. François LALAURETTE	Examinateur
M. Thierry BERGOT	Directeur de thèse

Météo-France CNRM/GMME/RECYF, 42 Av. G. Coriolis  
31057 TOULOUSE Cedex, France



*“L’avenir de l’humanité  
c’est que chacun puisse  
découvrir et devenir  
ce pourquoi il était fait ... ”*

Ilya Prigogine  
*Prix Nobel de chimie, 1977*



*Cercle limite III, C. Escher*



*En premier lieu, je salue l'investissement de MM. Andrew Lorenc et François-Xavier Le Dimet, rapporteurs auprès de l'Université Toulouse III, dans leur travail d'inspection et d'étude minutieuse du mémoire de thèse. Je les en remercie tout particulièrement et j'adresse aussi ma sincère gratitude à M. Serge Chauzy d'avoir accepté de présider le jury de soutenance.*

*Mes remerciements s'adressent aussi à MM. François Bouttier, François Lalaurette et François Gérard pour avoir accepté de participer à ce jury de thèse en tant qu'examinateurs de ce travail. Je salue la compétence scientifique et les grandes qualités humaines de Thierry Bergot. En parfait maître de thèse, il a su me guider et m'accompagner dans ces recherches tout en me faisant partager son expérience du ciblage des observations. Je retire grand bénéfice de ces années de travail à ses côtés. Merci Thierry !*

*L'encadrement de cette thèse a aussi bénéficié de la tutelle d'Alain Joly qui a insufflé toute son ambition à ce sujet. Ses nombreuses et régulières interventions au cours de ces années ainsi que ses conseils avisés m'ont été très utiles pour mener ce travail à terme. En outre, le parrainage de cette thèse par François Bouttier ainsi que sa collaboration sur le sujet de la sensibilité aux observations ont permis que ce travail prenne rapidement un caractère concret dans un univers d'algorithmes quasi-opérationnels à Météo-France.*

*Nombreux sont ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ce travail de recherche. Je leur adresse l'expression de ma sincère gratitude. Je citerais Nadia Donnadille-Fourrié en sa qualité de collaboratrice et collègue de bureau, Gwenaëlle Hello pour ses conseils avisés en matière de calcul de sensibilité, assortis du solide soutien informatique qu'elle m'a apporté, ainsi que Gérald Desroziers pour son expertise en assimilation de données. Plus largement, je remercie vivement toute l'équipe RECYF du CNRM/GMME pour le cadre de travail qu'elle procure, les conseils, la passion et l'ambition de la recherche en météorologie qu'elle prodigue. De plus, l'ambiance de tous les jours au CNRM/GMME me laissera d'impérissables souvenirs.*

*Par ailleurs, la continuation de ce travail de thèse depuis Septembre 2000 a été possible grâce au double accueil par MM. Philippe Bougeault au sein du CNRM/GMME et Bruno Lacroix au sein de DPrévi/COMPAS.*

*Ma reconnaissance va aussi aux membres du CNRM/GMAP, pour leur sollicitude et leur expertise scientifique. Gérald Desroziers, Florence Rabier, Jean-Noël Thépaut, Patrick Moll et Philippe Caille m'ont apporté une aide précieuse.*

*Je salue aussi la patience et l'attention de celles et ceux qui ont contribué à la mise en forme finale de ce rapport (plus particulièrement Thierry et Nicole) et/ou qui m'ont soutenu (parents et amis) en dehors du cadre professionnel.*



# STUDY OF THE OPTIMIZATION OF AN ADAPTIVE OBSERVATION SYSTEM DESIGNED TO IMPROVE THE FORECASTS OF METEOROLOGICAL LOWS

## Key-words

Adaptive observation, adjoint methods, variational assimilation, observation sensitivity, optimization of observing systems, Kalman Filter Sensitivity, FASTEX

## Summary

Forecasting severe cyclogenesis within numerical prediction systems remains a problematic issue even for short range forecasts (1 or 2 days). Observation targeting is designed to improve such cases and to cope with hard to predict situations. The predictability issue was among the scientific objectives of FASTEX which consisted in the first real-time test of such an observing strategy. Some additional observations were deployed over pre-computed sensitive areas (targets) that varied from day to day, according to the meteorological situation.

The sensitive areas of FASTEX were computed using adjoint techniques. So those unstable structures account for the dynamical properties of the atmosphere. It has been shown however, that targeting efficiency strongly depends on the data assimilation system that will process the targeted observations. In order to cope with this efficiency problem, we developed an approach called the “sensitivity to observations”. Its computation enables us to draw up sensitivity maps that take into account all of the observations to be used within a given data assimilation system.

The formulation of the sensitivity to the observations is based on the adjoint of the assimilation operator. This linear computation combines forecast sensitivities using the adjoint forecast model and the influence of the adjoint of a variational data assimilation operator: it has been developed within a quasi-operational framework using the 3D-Var of ARPEGE (at Météo France).

In a diagnostic context, the sensitivity to the observations can be used as a critical tool to analyze the deployments of the adaptive observations that were tested during FASTEX. This technique provides us with an insight into the complex interactions of the different types of observations (conventional and targeted, at least) that intervene in the data assimilation process. The sensitivity to the observations appears to be a powerful tool to diagnose how the targeted observations individually impact the subsequent forecast. We show a case study for FASTEX IOP17.

This adjoint technique, when applied to the variational data assimilation process, is helpful to detect some unsuitable usage of the targeted data handled within such a process. We illustrate this kind of implementation on the IOP18 and isolate a few inconsistencies in the assimilation system that trigger spurious effects on the subsequent forecasts.

However, real-time is the natural context of targeting techniques; so we adapted the adjoint approach to prognosticate some suitable adaptive deployments of observations. This prognostic usage addresses the complex issue of the optimization of the targeting techniques. But its complexity makes optimization an untrackable problem for the moment. We consequently focused on some sub-optimal sampling strategies as a first step towards this prime objective and to renew the adjoint targeting techniques of FASTEX. In a simulated prognostic context, we test a real-time feasible strategy by discriminating between proposed realistic deployments. To do so, we use a statistical measure of the quality of the subsequent forecasts.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	La prévisibilité des tempêtes . . . . .	1
1.2	Le ciblage des observations et FASTEX . . . . .	2
1.3	Les points clefs issus de FASTEX . . . . .	4
1.4	Les questions examinées dans ce travail . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Sensibilité aux observations :</b>	<b>7</b>
2.1	Sensibilité et modèle adjoint : principe et théorie . . . . .	7
2.1.1	Approche en sensibilité durant FASTEX . . . . .	7
2.1.2	L'approche linéaire . . . . .	7
2.1.3	Exemples de zones sensibles . . . . .	13
2.2	Sensibilité aux observations . . . . .	15
2.2.1	Contexte de l'assimilation de données . . . . .	15
2.2.2	Sensibilité aux conditions primordiales à l'assimilation . . . . .	19
2.3	Exemples simples . . . . .	24
2.3.1	Contexte de l'étude . . . . .	25
2.3.2	Observation directe de tous les paramètres du modèle . . . . .	26
2.3.3	Observation unique sur un point de grille du modèle (sans schéma d'interpolation) . . . . .	27
2.3.4	Cas de plusieurs observations avec un schéma d'interpolation . . . . .	31
2.4	Application dans un cadre variationnel . . . . .	37
2.4.1	Approche variationnelle . . . . .	38
2.4.2	Variance d'erreur d'analyse et Hessienne de la fonction objective $J$ . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Algorithmique et Validation</b>	<b>43</b>
3.1	Le modèle ARPEGE . . . . .	43
3.2	Le 3D-Var de ARPEGE . . . . .	44
3.2.1	Les étapes de l'algorithme 3D-Var . . . . .	44
3.2.2	Formulation des opérateurs et des statistiques . . . . .	47
3.2.3	La minimisation . . . . .	49
3.3	Algorithmique de la sensibilité aux observations . . . . .	50
3.3.1	Les étapes du calcul adjoint . . . . .	50

3.3.2	L'estimation de l'inverse de la Hessienne de $J$ . . . . .	51
3.3.3	Finalisation du calcul de la sensibilité aux observations . . . . .	56
3.3.4	Calcul de la sensibilité à l'ébauche . . . . .	57
3.3.5	Discussion de choix techniques . . . . .	58
3.3.6	Conclusion de la partie 3.3 . . . . .	61
3.4	Validations . . . . .	61
3.4.1	Les vecteurs de <i>mise à jour</i> . . . . .	61
3.4.2	Validation de $\mathbf{A}$ . . . . .	73
3.4.3	Validation de la sensibilité aux observations: tests numériques . . . . .	84
3.5	Conclusion sur les choix algorithmiques et les validations . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Étude de la POI17 :</b>	<b>99</b>
4.1	Présentation de la POI17 . . . . .	99
4.2	Article Doerenbecher et Bergot, 2001 . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Étude de la POI18 :</b>	<b>119</b>
5.1	La POI 18: du 22 au 25 février 1997 . . . . .	119
5.1.1	La description de la situation météorologique . . . . .	119
5.1.2	Le dispositif des observations . . . . .	120
5.2	La sensibilité aux conditions initiales . . . . .	122
5.2.1	La sensibilité aux conditions initiales . . . . .	122
5.2.2	La sensibilité aux conditions initiales dans l'espace des observations . . . . .	124
5.3	Les effets des fonctions de structure de $\mathbf{A}$ sur $\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$ . . . . .	126
5.3.1	Influence des fonctions de structure . . . . .	127
5.3.2	Gain des observations ciblées sur les covariances . . . . .	129
5.4	La sensibilité aux observations ciblées . . . . .	131
5.4.1	La sensibilité aux observations de température . . . . .	132
5.4.2	La sensibilité aux observations de vent . . . . .	132
5.5	Contribution des observations ciblées à la prévision . . . . .	135
5.5.1	Contribution des observations de température . . . . .	136
5.5.2	Contribution des observations de vent . . . . .	138
5.6	Étude des écarts entre observations et ébauche . . . . .	138
5.6.1	Champs d'innovation . . . . .	140
5.6.2	Comparaison des mesures de température du $\mathbf{G-IV}$ à d'autres observa- tions indépendantes du vol. . . . .	143
5.6.3	Étude des mesures de vent . . . . .	152
5.6.4	Positionnement de la dépression $L44$ . . . . .	156
<b>6</b>	<b>Approche pronostique du ciblage</b>	<b>159</b>
6.1	Optimisation du ciblage . . . . .	160
6.2	Article de T. Bergot et A. Doerenbecher (2002) . . . . .	161

6.3	Résultats obtenus avec deux stratégies sub-optimales . . . . .	213
6.3.1	Exemple de critère de sélection des déploiements . . . . .	213
6.3.2	Première stratégie : itérative et avec une observation unique . . . . .	214
6.3.3	Tests de déploiements alternatifs . . . . .	219
6.4	Éléments de conclusion sur l'approche pronostique . . . . .	228
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>231</b>
	<b>Références</b>	<b>237</b>
<b>A</b>	<b>Éléments de théorie</b>	<b>243</b>
A.1	Formulation de Sherman-Morrison-Woodbury . . . . .	243
A.2	Minimisation et vecteurs de <i>mise à jour</i> . . . . .	245
A.2.1	Étape 1 : L'algorithme de Lanczos . . . . .	245
A.2.2	Étape 2 : le calcul des vecteurs de <i>mise à jour</i> . . . . .	247
A.3	Les algorithmes combinés de Lanczos et du gradient conjugué . . . . .	249
<b>B</b>	<b>Résultats complémentaires</b>	<b>251</b>
B.1	Variance de la fonction coût et erreurs d'analyse. . . . .	251
B.2	Vecteurs de <i>mise à jour</i> et observations ciblées . . . . .	252
B.2.1	La structure instable . . . . .	253
B.2.2	Le vecteur de <i>mise à jour</i> numéro <b>5</b> . . . . .	254
B.2.3	Le vecteur de <i>mise à jour</i> numéro <b>200</b> . . . . .	255
<b>C</b>	<b>Notations</b>	<b>257</b>
C.1	Variables scalaires . . . . .	257
C.2	Fonctions . . . . .	258
C.3	Vecteurs d'état du modèle et incréments de dimension $n$ . . . . .	258
C.4	Autres vecteurs de dimension $n$ . . . . .	259
C.5	Vecteurs d'observations et autres vecteurs de dimension $m$ . . . . .	259
C.6	Vecteurs de gradient et sensibilité . . . . .	260
C.7	Opérateurs et matrices . . . . .	260
C.7.1	Opérateurs de prévision . . . . .	260
C.7.2	Opérateurs et matrice d'assimilation . . . . .	261
C.7.3	Matrices diverses . . . . .	261
<b>D</b>	<b>Acronymes</b>	<b>263</b>
D.1	Acronymes du système d'observation . . . . .	263
D.2	Acronymes de l'assimilation . . . . .	264
D.3	Acronymes nominatifs . . . . .	264
D.4	Acronymes divers . . . . .	264



# Liste des tableaux

3.1	Caractéristiques d'un exemple d'observation unique de température simulée, utilisée pour la validation de vecteurs de <i>mise à jour</i> . . . . .	63
3.2	Caractéristiques de l'observation unique et simulée de vent, utilisée dans la validation des vecteurs de <i>mise à jour</i> . . . . .	68
3.3	Tableau de dénombrement des observations pour 3 cas FASTEX dans leur domaine d'étude . . . . .	75
3.4	Validation de $\mathbf{A}$ : variance des variations de la fonction coût $\mathcal{J}$ ( $Var(\delta\mathcal{J})$ ) dans la direction du gradient . . . . .	78
3.5	Validation de $\mathbf{A}$ : Ratios de convergence de $\mathbf{A}$ pour diverses configurations d'observation et de fonction coût . . . . .	80
3.6	Tests numériques sur la sensibilité aux observations : caractéristiques des observations utilisées pour les tests du gradient et de l'adjoint . . . . .	85
3.7	Récapitulatif de la méthode de mise en œuvre des tests non-linéaires sur la sensibilité aux observations . . . . .	90
3.8	Description des expériences des tests non-linéaires sur la POI18 . . . . .	90
3.9	Tests non-linéaires de la sensibilité aux observations conventionnelles et ciblées sur un cas de vol du $\mathbf{G-IV}$ de la POI18 . . . . .	91
3.10	Validation de la sensibilité aux observations sans les étapes du filtrage et de l'analyse de surface dans l'algorithme d'assimilation . . . . .	93
3.11	Validation de la sensibilité aux observations dans l'algorithme d'assimilation variationnelle : quelques pourcentages . . . . .	94
3.12	Effet du filtrage sur l'analyse et la prévision : cas de la fonction coût <i>enstrophie</i> . . . . .	95
3.13	Effet du filtrage sur l'analyse et la prévision exprimé en pourcentage d'erreur sur l'évaluation de la fonction coût <i>enstrophie</i> . . . . .	96
5.1	POI18 : Description du déploiement des observations ciblées issues du premier vol du $\mathbf{G-IV}$ , le 22 février à 12h TU . . . . .	121
6.1	Expériences sur la POI18 avec la seconde stratégie pronostique . . . . .	225
6.2	Résultats sur la POI18 de la seconde stratégie pronostique . . . . .	225



# Table des figures

1.1	Schéma de principe du ciblage des observations durant FASTEX . . . . .	2
1.2	Déploiement des dropsondes du <b>G-IV</b> durant FASTEX . . . . .	3
1.3	Amélioration des prévisions durant FASTEX, en fonction de leurs échéances et de l’algorithme variationnel dont elles sont issues . . . . .	5
2.1	Exemple de zone sensible: sensibilité à la température à $t_0$ , cas de la POI17 . .	14
2.2	Exemple de zone sensible: coupe verticale du gradient à $t_0$ , cas de la POI17 . .	14
2.3	Étapes de l’assimilation . . . . .	18
2.4	Étapes de la sensibilité aux observations . . . . .	21
2.5	Récapitulatif des étapes d’assimilation, prévision, calcul de la fonction coût et calcul des sensibilités et gradients associés . . . . .	23
2.6	Exemples simples: incrément d’analyse dans le cas d’une observation unique .	28
2.7	Exemples simples: <i>profil composite</i> de sensibilité à une observation unique . . .	31
2.8	Exemples simples: schéma d’une colonne d’atmosphère à deux couches . . . .	33
2.9	Exemples simples: cas d’une colonne d’atmosphère multicouche sans corréla- tions des erreurs de l’ébauche entre ces couches . . . . .	35
2.10	Exemples simples: cas d’une colonne d’atmosphère multicouche avec corréla- tion des erreurs de l’ébauche entre ces couches . . . . .	36
2.11	Principe général de l’assimilation de données . . . . .	37
3.1	Étapes de l’assimilation variationnelle 3D de ARPEGE . . . . .	45
3.2	Étapes des calculs adjoints de la sensibilité aux observations ( $\nabla_{y^o} \mathcal{J}$ ) . . . . .	50
3.3	Schématisation des étapes logicielles du calcul de sensibilité aux observations .	58
3.4	Validation des vecteurs de <i>mise à jour</i> : incrément d’analyse et vecteur de <i>mise</i> à <i>jour</i> en coupe horizontale . . . . .	65
3.5	Validation des vecteurs de <i>mise à jour</i> : coupes verticales le long d’un parallèle (40°N) d’un incrément d’analyse . . . . .	65
3.6	Validation des vecteurs de <i>mise à jour</i> : coupes verticales méridiennes en tem- pérature d’un incrément d’analyse . . . . .	66
3.7	Validation des vecteurs de <i>mise à jour</i> : comparaison de coupes verticales de $\delta \mathbf{x}^a$ et $\mathbf{V}$ selon un axe N-O $\rightarrow$ S-E . . . . .	66
3.8	Validation des vecteurs de <i>mise à jour</i> : coupes horizontales des incréments d’analyse en fonction courant à 586 hPa . . . . .	69

3.9	Validation des vecteurs de <i>mise à jour</i> : coupes horizontales de l'incrément d'analyse en vent à 586 hPa et vecteurs de <i>mise à jour</i> associés . . . . .	70
3.10	Validation des vecteurs de <i>mise à jour</i> : coupes horizontales de $\mathbf{V}\mathbf{V}^T\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{d}$ et de $\mathbf{B}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{d}$ à 586 hPa . . . . .	71
3.11	Validation des vecteurs de <i>mise à jour</i> : coupes verticales de l'incrément d'analyse en vent selon un axe N-O $\rightarrow$ S-E . . . . .	72
3.12	Validation des vecteurs de <i>mise à jour</i> : coupe verticale de l'incrément d'analyse en température . . . . .	72
3.13	Validation de $\mathbf{A}$ : effet de l'accroissement du rang $i$ de $\mathbf{V}\mathbf{V}^T$ sur la convergence de $\mathfrak{R}_i$ . . . . .	78
3.14	Stabilité de $Var(\delta\mathcal{J})$ ( $\nabla_{\mathbf{x}_a}\mathcal{J}^T\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{x}_a}\mathcal{J}$ ) à la variation des mesures $\mathbf{y}^o$ . . . . .	82
3.15	Validation de $\mathbf{A}$ : effet de la variance des erreurs d'observation sur la convergence de $\mathbf{A}$ . . . . .	83
3.16	Validation de la sensibilité aux observations: test du gradient . . . . .	87
4.1	Schéma synthétique de l'organisation de la POI17 de FASTEX . . . . .	100
5.1	Schéma synthétique de l'organisation de la POI18 du FASTEX . . . . .	120
5.2	Sensibilité aux conditions initiales de la POI18 . . . . .	123
5.3	Sensibilité aux conditions initiales de la POI18, coupes verticales . . . . .	124
5.4	Sensibilité de la POI18, représentées dans le plan de sondage . . . . .	125
5.5	Sensibilité aux CI de la POI18, représentées dans l'espace des observations ciblées . . . . .	126
5.6	POI18: coupes horizontales du vecteur $\mathbf{c} = \mathbf{A}\nabla_{\mathbf{x}_a}\mathcal{J}$ , pour la température . . . . .	127
5.7	POI18: coupes verticales du vecteur $\mathbf{c}$ , pour la température . . . . .	128
5.8	POI18: différence entre $\mathbf{c}_{ct}$ et $\mathbf{c}_c$ , pour la température . . . . .	130
5.9	POI18: différence entre $\mathbf{c}_{ct}$ et $\mathbf{c}_c$ pour la température, coupes verticales . . . . .	131
5.10	POI18: sensibilité aux observations ciblées de température . . . . .	133
5.11	POI18: sensibilité aux observations ciblées de vent . . . . .	134
5.12	POI18: fonction de contribution à l'impact par les observations ciblées de température . . . . .	137
5.13	POI18: fonction de contribution à l'impact par les observations ciblées de vent . . . . .	139
5.14	POI18: écarts entre les observations de température et l'ébauche . . . . .	141
5.15	POI18: écarts entre les observations ciblées de vent et l'ébauche . . . . .	142
5.16	POI18: localisation des mesures pour comparaison avec l'ébauche . . . . .	144
5.17	POI18: émagramme de la vingt-quatrième sonde du $\mathbf{G-IV}$ . . . . .	146
5.18	POI18: émagramme de la douzième dropsonde du déploiement du $\mathbf{G-IV}$ . . . . .	148
5.19	POI18: émagramme du sondage du Suroît représentatif du sud du déploiement du $\mathbf{G-IV}$ . . . . .	149
5.20	POI18: écart de pression et innovation de température pour les observations à basse altitude des sondes du $\mathbf{G-IV}$ . . . . .	151
5.21	POI18: vent de l'ébauche et vent observé aux points de sondage . . . . .	154



5.22	POI18: <i>jet streak</i> dans l'ébauche à 400 <i>hPa</i> . . . . .	155
5.23	POI18: comparaison du géopotentiel à 350 <i>hPa</i> de l'ébauche et de la réanalyse	156
5.24	POI18: comparaison du géopotentiel à 500 <i>hPa</i> de l'ébauche et de la réanalyse	157
5.25	POI18: comparaison du géopotentiel à 850 <i>hPa</i> de l'ébauche et de la réanalyse	157
6.1	POI17: 48 positions testées pour une observation de température à 600 <i>hPa</i> .	215
6.2	POI17: valeurs du critère $\Delta Var(\mathcal{S})$ aux 48 positions testées pour la première itération. Comparaison avec le critère $\mathbf{h}_t \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$ . . . . .	216
6.3	POI17: 48 observations de température testées sur $\Delta Var(\mathcal{S})$ en seconde itération	217
6.4	POI17: Réduction de $Var(\mathcal{S})$ pour chaque itération . . . . .	218
6.5	POI18: déploiement de 25 dropsondes selon le plan de vol du <b>G-IV</b> . . . . .	221
6.6	POI18: déploiement de 17 dropsondes extraites du plan de vol du <b>G-IV</b> . . . . .	222
6.7	POI18: déploiement de 25 dropsondes selon une grille régulière à maille large .	222
6.8	POI18: déploiement de 25 dropsondes selon une grille régulière à maille moyenne	223
6.9	POI18: déploiement de 25 dropsondes selon un plan de vol alternatif à celui du <b>G-IV</b> . . . . .	223
6.10	POI18: déploiement de 17 dropsondes selon un plan de vol alternatif à celui du <b>G-IV</b> . . . . .	224
6.11	POI18: déploiement de 25 dropsondes selon un plan de vol en boucle . . . . .	224
6.12	POI18: estimation de $\Delta Var(\mathcal{S})$ pour divers déploiements alternatifs . . . . .	226
B.1	Coupes horizontales de la structure sensible en température à 300, 550 et 850 <i>hPa</i>	253
B.2	Coupes horizontales du 5 <sup>e</sup> vecteur de <i>mise à jour</i> en température à 300, 550 et 850 <i>hPa</i> . . . . .	254
B.3	Coupes horizontales du 200 <sup>e</sup> vecteur de <i>mise à jour</i> en température à 300, 550 et 850 <i>hPa</i> . . . . .	255



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 La prévisibilité des tempêtes

Malgré les progrès des modèles numériques et des systèmes d'assimilation de données actuels, nous sommes toujours impuissants à prévoir de manière précise certains phénomènes météorologiques extrêmes, comme les tempêtes. Les erreurs de prévision n'ont pas un caractère systématique, comme l'ont très bien montré les deux tempêtes qui touchèrent la France à la fin du mois de Décembre 1999. Pour ces cas, le modèle ARPEGE de prévision opérationnelle de Météo-France a réalisé une bonne prévision de la première tempête, alors que la prévision de la seconde tempête se révélait assez médiocre (Baleste *et al.*, 2001). Ces études montrent que le problème ne vient pas d'un défaut systématique dans la modélisation du phénomène qui peut être reproduit de manière très précise par les modèles de prévisions actuels, mais qu'il est plutôt lié aux conditions initiales de la prévision.

On se doute alors que le problème découle du caractère chaotique de l'atmosphère. Ceci entraîne, dans certaines conditions météorologiques, une sensibilité extrême de la prévision aux conditions initiales. Ce phénomène a été mis en évidence par les travaux de Lorenz dans les années soixante (Lorenz, 1963), et est connu sous le nom d'effet papillon. L'image de Lorenz consiste à illustrer qu'une infime modification des conditions atmosphériques, liée aux battements des ailes d'un papillon par exemple, peut dans certains cas s'amplifier très fortement et conduire à une tempête quelques jours plus tard. Bien entendu, ceci n'est qu'une image permettant de bien illustrer le phénomène de sensibilité extrême d'une prévision aux conditions initiales.

Ce caractère chaotique de l'atmosphère se traduit par une incertitude sur les prévisions météorologiques. Cette incertitude dépend de l'écoulement atmosphérique: ainsi certaines situations sont prévisibles de manière fiable (situations à forte prévisibilité), alors que d'autres le sont beaucoup moins (situations à faible prévisibilité). On constate que la prévisibilité de l'atmosphère varie en fonction du temps et de l'espace. Malheureusement, les situations les moins prévisibles sont aussi souvent des situations où les conséquences socio-économiques peuvent être les plus graves. Ceci est particulièrement vrai dans le cas des tempêtes (voir l'exemple donné par les tempêtes de Noël 1999). Ce sont ces situations qu'il faut essayer de

prévoir de manière précise et ce sont ces situations qui mettent souvent le prévisionniste dans une position inconfortable.

Afin d'essayer de résoudre ce problème, un nouveau concept a vu le jour au milieu des années 90 : le concept des observations adaptatives aussi appelé *ciblage des observations* (Snyder, 1996). Le but est de concentrer des observations au sein de zones sensibles, de manière à contrôler au mieux les erreurs initiales et donc à améliorer de manière notable l'incertitude sur les prévisions (figure 1.1). Le problème est alors de définir les zones sensibles ainsi que la manière de les observer (quels paramètres?, combien de mesures?, etc). On peut cependant déjà remarquer que ce concept s'oppose au fondement même de l'observation météorologique. Ainsi, alors que le réseau d'observation conventionnel in situ effectue des observations à des endroits et à des heures fixes, les observations ciblées permettent une certaine flexibilité et souplesse d'utilisation des moyens de mesure.

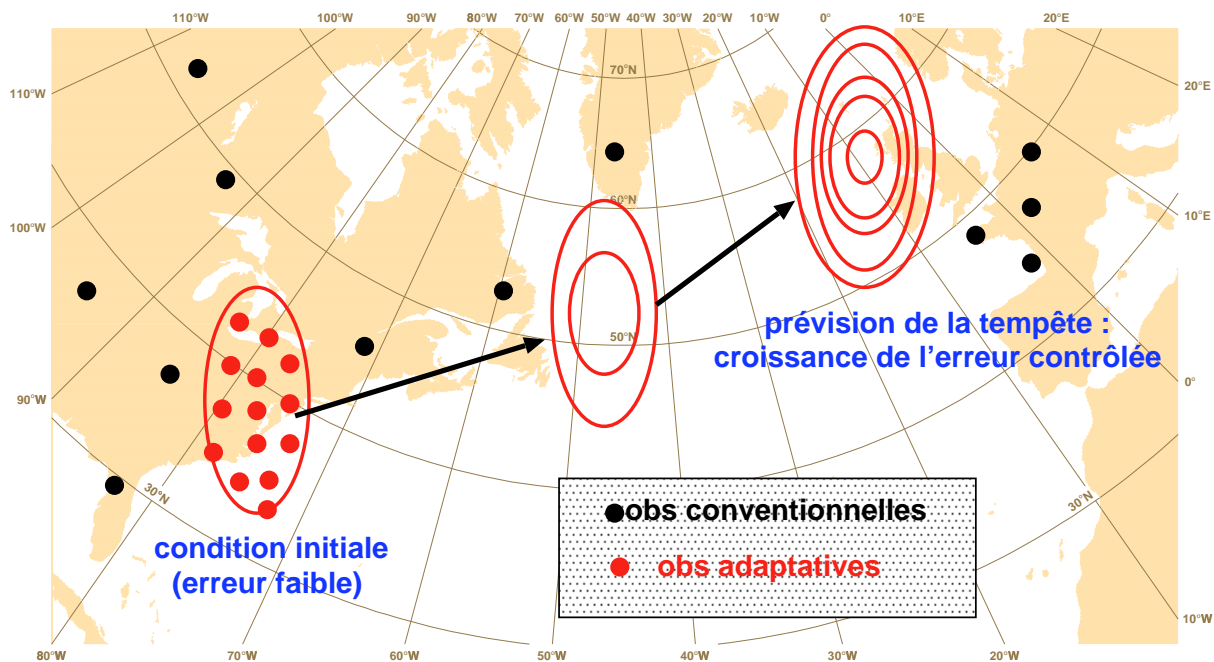


FIG. 1.1: Représentation schématique du concept des observations adaptatives.

## 1.2 Le ciblage des observations et FASTEX

Le concept des observations ciblées a généré un très grand intérêt dans la communauté météorologique. Ceci s'est concrétisé par un premier essai dans la réalité, lors de la campagne FASTEX (Joly *et al.*, 1999) (Fronts and Atlantic Storm-Track EXperiment) en Janvier et Février 1997 (<http://www.cnrm.meteo.fr/fastex>). Au cours de cette campagne, différents outils ont été utilisés pour déterminer les zones sensibles.

On peut classer ces méthodes en différents types. Détaillons tout d'abord les méthodes s'appuyant sur les théories linéaire et adjointe d'un modèle de prévision. Une première approche est basée sur le calcul des structures s'amplifiant le plus sur un intervalle de temps

donné, appelées vecteurs singuliers (Buizza et Palmer, 1995 ; Bergot *et al.*, 1999 ; Palmer *et al.*, 1998 ; Gelaro *et al.*, 1999). Le principe de ce calcul sera rappelé brièvement dans la partie 2.1.2. Le second outil utilisé était le calcul de sensibilité ou gradient aux conditions initiales. Le principe est de déterminer l'effet des modifications des conditions initiales sur un aspect donné de la prévision. Pour ceci, on détermine à l'aide du modèle adjoint d'un modèle de prévision numérique un champs de type dérivé (d'où l'appellation gradient de cette méthode) qui permet après une multiplication par une perturbation sur les conditions initiales d'estimer la modification d'un aspect de la prévision (Langland *et al.*, 1999 ; Bergot *et al.*, 1999). Cette méthode sera examinée en détail dans la partie 2.1.2. Une perturbation initiale d'amplitude donnée sera donc plus efficace (au sens où elle aura plus d'impact sur l'aspect de la prévision étudié) si elle est située dans une zone où le champ de sensibilité présente de fortes amplitudes (forte sensibilité de la prévision). C'est ce type de méthode qui sera étudié au cours de ce travail. Les cibles déterminées à l'aide de ces deux outils ont été échantillonnées au cours de la campagne de mesures FASTEX par 8 vols du Gulfstream IV (245 sondages ont été effectués au total, cf. figure 1.2).

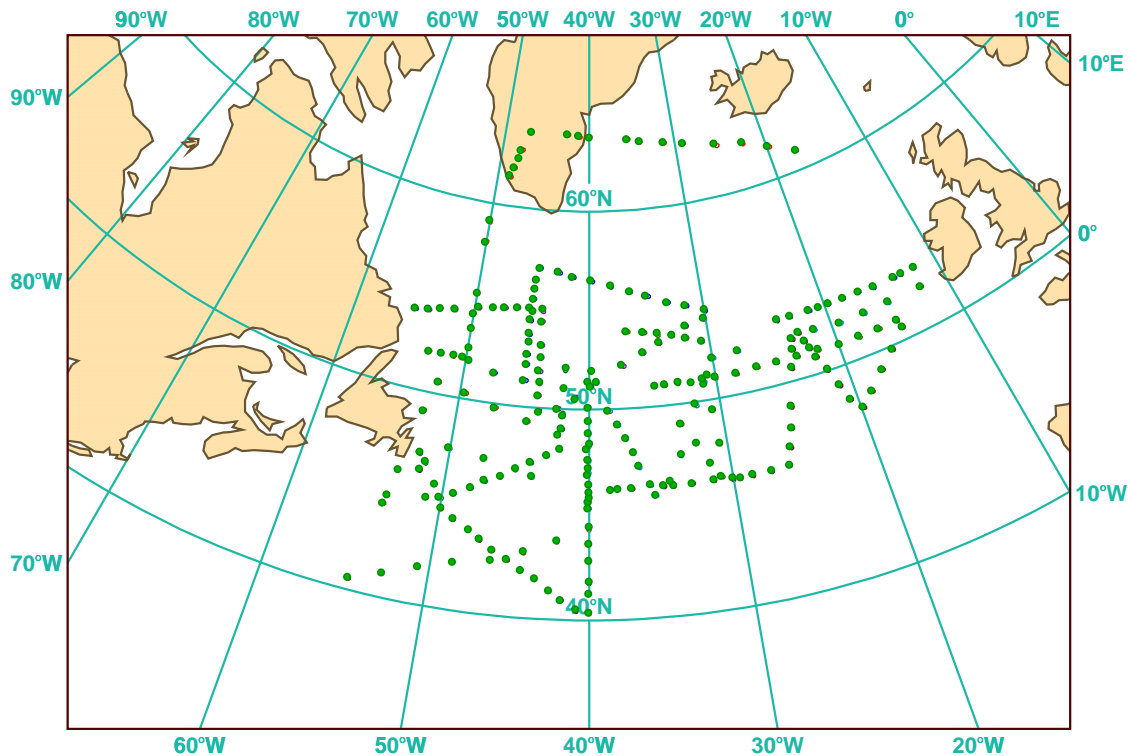


FIG. 1.2: Localisation des observations ciblées effectuées par le GulfstreamIV (noté G-IV) au cours des deux mois de la campagne FASTEX.

Le second type de méthode permettant de calculer des cibles s'appuie sur des prévisions d'ensemble. Une méthode appelée *Ensemble Transform* a été proposée par C. Bishop et Z. Toth (Bishop et Toth, 1999). Le but est de trouver la position des observations qui permettront de minimiser certains aspects de la variance d'erreur de prévision (déterminée à l'aide d'un ensemble de prévisions). Cette technique a été utilisée pendant FASTEX pour planifier les 12 missions du Learjet (pour 186 sondages effectués).

Ainsi, la campagne FASTEX permet de disposer d'un petit échantillon de situations où des observations supplémentaires ont été réalisées au-dessus de l'Atlantique, et donc de tester la robustesse du concept des observations adaptatives. D'autres campagnes de mesures dont le but était de tester le concept des observations adaptatives ont ensuite eu lieu chaque année (de 1998 à 2002) sur l'Océan Pacifique Nord (NORPEX - (Langland *et al.*, 1999)), U.S. Winter Storm Reconnaissance Program 2000, 2001 (Toth *et al.*, 2000 ; Szunyogh *et al.*, 2000 ; Majumdar *et al.*, 2001).

### 1.3 Les points clefs issus de FASTEX

Différentes études ont eu lieu après FASTEX pour essayer d'évaluer le bénéfice des observations adaptatives. Certaines se sont focalisées sur l'étude détaillée de certaines POI (Période d'Observation Intensive), en particulier les POI17 et POI18 (Bergot, 1999 ; Langland *et al.*, 1999). Les résultats se sont révélés encourageants (amélioration assez nette de la prévision pour différents systèmes de prévision numérique) et ont été corroborés par les résultats d'autres centres que Météo-France, tels que le NRL (Monterey, Californie) notamment. Pour ces deux POI, l'erreur de prévision semble principalement due aux erreurs sur les conditions initiales se projetant sur les modes les plus instables (Bergot, 1999 ; Gelaro *et al.*, 1999).

Cependant, il est assez difficile de tirer des conclusions générales de ce genre d'étude de cas. Pour essayer de mieux comprendre les forces et défauts de l'utilisation des approches adjointes pour le ciblage des observations, il convient d'étudier un maximum d'expériences de ciblage. Même si le nombre de cas issus de FASTEX est assez restreint, Bergot T. (1999 et 2001) a essayé de chiffrer de manière systématique et pour deux systèmes d'assimilation (3D-Var et 4D-Var), l'influence des observations adaptatives sur la qualité de la prévision.

Sur la figure (1.3-a.), on remarque qu'avec une assimilation de type 3D-Var, l'amélioration moyenne de la prévision est quasi nulle (de l'ordre 3% de l'erreur de prévision à 24 heures). Cependant, on note une dispersion très importante des résultats avec des *améliorations très nettes* (réduction de l'erreur de prévision d'environ un tiers) mais aussi des cas de *détérioration importante* de la prévision (augmentation d'environ 50% de l'erreur de prévision). Ainsi, la faible amélioration moyenne qui résulte de cette forte dispersion reflète l'hétérogénéité des résultats que produit le 3D-Var. Un tel algorithme d'assimilation n'est capable de bien exploiter le potentiel des observations adaptatives que dans certaines conditions relatives à un échantillonnage très précis des zones sensibles. C'est le cas des vols **G-IV** des POI17 et 18, mais en général, l'efficacité des observations ciblées se révèle ainsi très dépendante de l'échantillonnage. Par contre, un schéma de type 4D-Var (opérationnel à Météo-France depuis le 20 Juin 2000) permet une réduction moyenne de l'erreur de prévision d'environ 12% entre 12 et 36 heures (cf. figure 1.3-b.). Ce schéma d'assimilation améliore ainsi les prévisions plus régulièrement, même si l'échantillonnage des zones sensibles n'est que partiel.

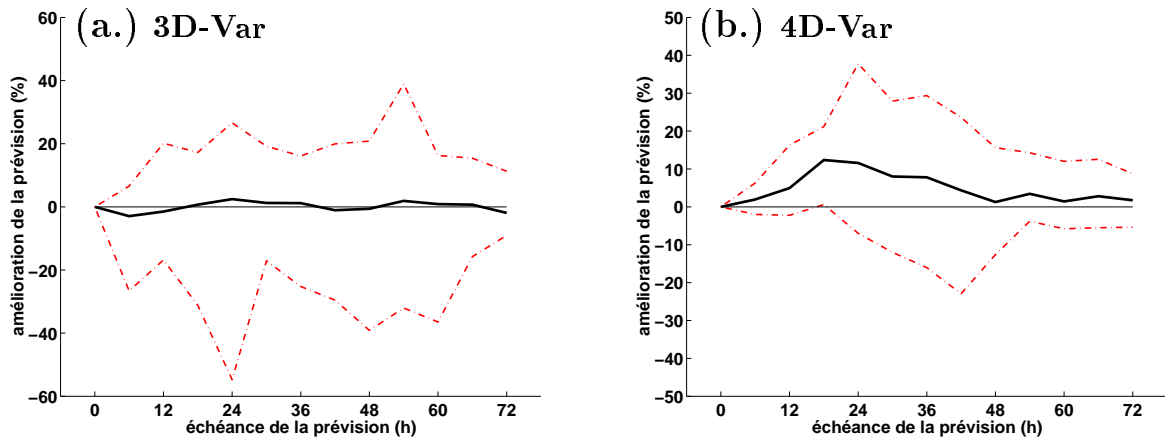


FIG. 1.3: Amélioration des prévisions liée à l'inclusion des observations ciblées, représentées en fonction de leurs échéances. Comparaison de la qualité des prévisions issues du 3D-Var (a.) et du 4D-Var (b.). L'amélioration est exprimée en % d'erreur sur la force du vent à 850 hPa. Trait plein : moyenne, traits pointillés : minimum et maximum. D'après Bergot (2001).

Cette étude a permis de mettre en évidence le rôle crucial joué par le système d'assimilation de données dans la réussite du concept des observations ciblées. Ainsi, FASTEX a permis de montrer qu'un système d'observation adaptatif *doit* être étroitement lié à la manière d'assimiler ces données. FASTEX a aussi permis de montrer l'influence de la stratégie d'échantillonnage sur l'efficacité des observations adaptatives ainsi que la redondance qu'il peut exister entre le réseau d'observations conventionnelles et le réseau d'observations adaptatives. De plus, ces études ont clairement montré que l'amélioration de la prévision n'est pas directement liée au nombre d'observations adaptatives effectuées. Il existe en effet des cas de forte amélioration alors qu'un nombre restreint de dropsondes ont été lâchées (cas de la POI18 de FASTEX - 25 dropsondes). Pour d'autres cas en revanche, l'efficacité est beaucoup plus faible malgré un nombre important d'observations effectuées (second vol de la POI17 - 52 dropsondes). FASTEX a montré très clairement la faisabilité du concept de ciblage des observations (à condition de disposer d'un système d'assimilation suffisamment précis). Mais si l'on veut que ce concept puisse passer du domaine de la recherche au domaine de la prévision opérationnelle, il convient d'essayer *d'optimiser* le réseau d'observations adaptatives, c'est-à-dire de minimiser le nombre d'observations tout en maximisant leur effet sur la prévision. Comme on peut le voir, la campagne FASTEX a posé plus de questions qu'elle n'en a résolues, et il convient maintenant de se pencher sur ces nouveaux aspects.

## 1.4 Les questions examinées dans ce travail

Les bases de ce travail sont nées des questions qui ont émergé après l'étude de l'efficacité des observations ciblées effectuées pendant FASTEX. Comme nous venons de le voir, il convient tout d'abord de replacer le concept du ciblage des observations au sein du système d'assimilation.

Dans un premier temps, nous étudierons de manière théorique, comment inclure le système d'assimilation dans les calculs de sensibilité. Ceci nous conduira à la construction d'un nouvel outil : *la sensibilité aux observations*. Quelques exemples simples permettront alors de mieux comprendre l'influence du système d'assimilation sur les champs de sensibilité (Chapitre 2).

Ensuite, nous regarderons comment ce nouveau concept peut être introduit dans l'univers de la prévision numérique opérationnelle. Nous détaillerons comment la sensibilité aux observations a été mise en place avec le modèle de prévision ARPEGE de Météo-France. Dans cette partie, nous présenterons des validations qui permettent de conforter l'approche mise en place (Chapitre 3).

Nous utiliserons ensuite cet outil de manière diagnostique sur des cas de déploiements adaptatifs de FASTEX. Nous illustrerons ces applications de la méthode de la sensibilité aux observations par des résultats obtenus sur deux POI de la campagne.

Avec la POI17, nous présenterons dans le chapitre 4, une étude critique du ciblage sous la forme d'un article paru dans la revue à comité de lecture *NonLinear Processes in Geophysics*, (Doerenbecher et Bergot, 2001).

L'étude sur la POI18 de FASTEX (chapitre 5) utilise la sensibilité aux observations afin de mettre en évidence des faiblesses de l'algorithme d'assimilation dans son utilisation des observations ciblées.

Certaines conclusions de ces études critiques nous permettront alors de nous pencher sur le problème de *l'optimisation* du déploiement des observations adaptatives (c'est-à-dire avoir une efficacité maximale pour un coût minimal). Nous proposerons alors une nouvelle méthode, appelée *Kalman Filter Sensitivity (KFS)*. Cette méthode sera illustrée à l'aide d'exemples simples, et sera comparée aux autres techniques basées sur les champs de sensibilités, dans un article à paraître dans la revue *Quarterly Journal of Royal Meteorological Society* (Bergot et Doerenbecher, 2002) et inclus dans le chapitre 6. On appliquera la méthode *KFS* à des cas de FASTEX dans un cadre pronostique simulé sur les POI17 et POI18. Les résultats obtenus avec deux stratégies de déploiement seront synthétisés dans ce chapitre.

Enfin, le dernier chapitre résumera les conclusions de ces travaux et présentera les perspectives de ces recherches pour le concept de ciblage des observations, en particulier dans la perspective de la future campagne de mesures THORPEX (The Hemispheric Observing-system Research and Predictability EXperiment).



## Chapitre 2

# Sensibilité aux observations : principe, théorie et exemples simples.

## 2.1 Sensibilité et modèle adjoint : principe et théorie

### 2.1.1 Approche en sensibilité durant FASTEX

Durant la campagne FASTEX, les régions dites sensibles désignées pour être échantillonnées par des observations supplémentaires étaient déterminées selon deux processus bien différents. La première technique, baptisée *Ensemble Transform* utilisait des produits issus de la prévision d'ensemble (Bishop et Toth, 1999). La seconde technique, qui nous intéresse tout particulièrement ici, est la technique utilisée par Météo-France et le NRL (Bergot, 1999 ; Gelaro *et al.*, 1999) durant FASTEX. Elle est basée sur l'utilisation des modèles linéaire tangent et adjoint. Il convient de bien expliciter la philosophie de cette approche dont est dérivée la sensibilité aux observations, ainsi que les termes en lesquels elle se décrit.

L'approche dite adjointe est un calcul qui permet d'estimer quelles sont les perturbations de l'état initial qui produiront la plus forte variation d'un aspect de la prévision météorologique. Elle détermine ainsi des zones sensibles. Par ailleurs, on sait qu'une erreur sur l'état initial pourra s'amplifier très fortement au cours du processus d'intégration numérique du modèle et créer ainsi de fortes erreurs de prévision. L'approche dite adjointe apparaît particulièrement intéressante dans le cadre du ciblage. En effet, la finalité de cette stratégie d'observation est de positionner des points de mesure supplémentaires afin d'observer de façon plus précise l'atmosphère à un endroit donné et d'avoir ainsi une meilleure description de l'état réel de l'atmosphère. On cherche ainsi à contrôler les erreurs susceptibles de dégrader la prévision, en plaçant des observations additionnelles dans ces zones sensibles.

### 2.1.2 L'approche linéaire

Le calcul de ces structures dites instables repose sur l'hypothèse de leur propagation linéaire au cours du temps : c'est l'hypothèse **linéaire tangente**. Les processus physiques décrits par le modèle de prévision numérique du temps sont non-linéaires. Cependant des perturbations autour d'un état de base (ou trajectoire) de l'atmosphère, si elles sont assez

petites en amplitude, peuvent se propager de manière linéaire avec l'intégration du modèle. On note  $\mathbf{x}(t_i)$  l'état de l'atmosphère défini à l'instant  $t_i$  et  $\mathbf{x}^f(t_{i+1})$ , l'état prévu de l'atmosphère, défini à l'instant  $t_{i+1}$ , issu de l'intégration du modèle numérique. Soit  $M_{i \rightarrow i+1}$  ce modèle de prévision numérique qui intègre  $\mathbf{x}(t_i)$  en  $\mathbf{x}^f(t_{i+1})$ .  $M_{i \rightarrow i+1}$  est non-linéaire et est aussi appelé modèle direct. On formalise cette relation par l'écriture suivante :

$$\mathbf{x}^f(t_{i+1}) = M_{i \rightarrow i+1}(\mathbf{x}(t_i)) \quad (2.1)$$

### L'hypothèse linéaire tangente

Si on considère une petite perturbation  $\delta\mathbf{x}(t_i)$  autour de  $\mathbf{x}(t_i)$  qui définit l'état initial perturbé  $\mathbf{x}'(t_i)$  ( $\mathbf{x}'(t_i) = \mathbf{x}(t_i) + \delta\mathbf{x}(t_i)$ ), l'approximation au premier ordre de la prévision ainsi perturbée permet d'écrire le développement de Taylor suivant :

$$\mathbf{x}^{f'}(t_{i+1}) = M_{i \rightarrow i+1}(\mathbf{x}'(t_i)) \quad (2.2a)$$

$$= M_{i \rightarrow i+1}(\mathbf{x}(t_i) + \delta\mathbf{x}(t_i)) \quad (2.2b)$$

$$= M_{i \rightarrow i+1}(\mathbf{x}(t_i)) + \mathbf{M}_{i \rightarrow i+1} \delta\mathbf{x}(t_i) + \mathcal{O}(\delta\mathbf{x}(t_i)^2) \quad (2.2c)$$

$$= \mathbf{x}^f(t_{i+1}) + \mathbf{M}_{i \rightarrow i+1} \delta\mathbf{x}(t_i) + \mathcal{O}(\delta\mathbf{x}(t_i)^2) \quad (2.2d)$$

$$\mathbf{x}^{f'}(t_{i+1}) = \mathbf{x}^f(t_{i+1}) + \delta\mathbf{x}^f(t_{i+1}) + \mathcal{O}(\delta\mathbf{x}(t_i)^2) \quad (2.2e)$$

où  $\mathcal{O}(\delta\mathbf{x}(t_i)^2)$  représente des termes du second ordre en  $\delta\mathbf{x}(t_i)$ . L'hypothèse linéaire-tangente consiste à négliger de tels termes, en supposant que  $\mathcal{O}(\delta\mathbf{x}(t_i)^2) \simeq 0$ . On note  $\mathbf{M}_i$  l'opérateur résultant de la linéarisation des équations du modèle direct. Cette linéarisation se fait autour de la trajectoire décrite par le modèle non-linéaire entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ . L'hypothèse linéaire nous permet de supposer que la différence entre l'état prévu perturbé et la prévision non perturbée est l'intégration avec le **modèle tangent** de la perturbation initiale :

$$M_{i \rightarrow i+1}(\mathbf{x}'(t_i)) - M_{i \rightarrow i+1}(\mathbf{x}(t_i)) = \mathbf{M}_{i \rightarrow i+1} \delta\mathbf{x}(t_i) \quad (2.3)$$

Cette hypothèse linéaire-tangente n'est valide que pour des perturbations de faible amplitude et sur une durée d'intégration limitée. De nombreuses études ont exploré le champ de validité d'une telle hypothèse (Lacarra et Talagrand, 1988 ; Rabier et Courtier, 1992). On donnera comme travaux de référence les investigations de F. Rabier selon lesquelles une telle hypothèse reste valide pour des durées d'intégration inférieures à 48 heures dans le cas d'un modèle quasi-adiabatique, pour des perturbations initiales d'une amplitude caractéristique d'une erreur d'analyse (Rabier *et al.*, 1996). Par la suite, on ne fera pas de différence sémantique entre l'opérateur linéaire ( $\mathbf{M}_{i \rightarrow i+1}$ ) et l'écriture matricielle ( $\mathbf{M}_i$ ) qui représente ce modèle linéaire.

### Le modèle adjoint

Soit une métrique sur le vecteur d'état de l'atmosphère à l'instant initial  $\mathbf{x}(t_i)$ , notée  $\mathcal{N}_i$ , ainsi qu'une métrique définie à l'instant final  $t_{i+1}$ , notée  $\mathcal{N}_{i+1}$ . Ces métriques définissent des produits internes sur l'espace des phases décrit par les états possibles des vecteurs d'états, à  $t_i$

ou à  $t_{i+1}$ .  $\mathcal{N}_i$  et  $\mathcal{N}_{i+1}$  représentent des matrices de norme définies positives et donc inversibles. À l'instant  $t_i$ , ce produit interne sur  $\delta\mathbf{x}(t_i)$  s'écrit :

$$\langle \delta\mathbf{x}(t_i); \delta\mathbf{x}(t_i) \rangle_{\mathcal{N}_i} = \delta\mathbf{x}(t_i)^T \mathcal{N}_i \delta\mathbf{x}(t_i) \quad (2.4a)$$

$$= \|\delta\mathbf{x}(t_i)\|_{\mathcal{N}_i}^2 \quad (2.4b)$$

où  $\langle ; \rangle_{\mathcal{N}_i}$  représente le produit scalaire pour la métrique  $\mathcal{N}_i$ .  $\|\delta\mathbf{x}(t_i)\|_{\mathcal{N}_i}^2$  est la norme quadratique de  $\delta\mathbf{x}(t_i)$  pour la métrique  $\mathcal{N}_i$ . Soient deux perturbations indépendantes de l'état du modèle:  $\delta\mathbf{x}(t_i)$  est définie à l'instant  $t_i$  et  $\delta\mathbf{z}(t_{i+1})$  est définie à l'instant  $t_{i+1}$ . Par définition de l'opérateur adjoint  $\mathbf{M}_i^*$ , on a une relation très générale entre  $\mathbf{M}_i$  et  $\mathbf{M}_i^*$ .

$$\langle \delta\mathbf{z}(t_{i+1}); \mathbf{M}_i \delta\mathbf{x}(t_i) \rangle_{\mathcal{N}_{i+1}} = \langle \mathbf{M}_i^* \delta\mathbf{z}(t_{i+1}); \delta\mathbf{x}(t_i) \rangle_{\mathcal{N}_i} \quad (2.5)$$

L'opérateur adjoint peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{M}_i^* = \mathcal{N}_i^{-1} \mathbf{M}_i^T \mathcal{N}_{i+1} \quad (2.6)$$

Si les métriques  $\mathcal{N}_i$  et  $\mathcal{N}_{i+1}$  sont représentées par des matrices identité, elles correspondent à des produits internes euclidiens et le modèle adjoint s'écrit comme le transposé (symbolisation  $T$ ) du modèle linéaire tangent (Errico, 1997). L'équation (2.6) illustre bien que, si le modèle linéaire tangent propage de petites perturbations de l'instant initial  $t_i$  à l'instant final  $t_{i+1}$ , le modèle adjoint propage des structures de l'instant final, vers l'instant initial. De cette formulation, il apparaît clairement que le modèle adjoint dépend des deux normes ( $\mathcal{N}_i$  et  $\mathcal{N}_{i+1}$ ) que nous avons spécifiées précédemment.

Par ailleurs, il faut prendre garde à ne pas confondre modèle adjoint et inverse. En effet,  $\mathbf{M}_i$  est non-inversible en général.

### Les vecteurs singuliers

La première approche, utilisant les modèles linéaire tangent et adjoint, est basée sur la détermination des structures non modales qui ont la plus forte croissance sur la période  $t_i \rightarrow t_{i+1}$ . Ceci revient à maximiser le ratio  $\tau$  entre l'amplitude de la perturbation initiale et celle de la perturbation propagée à  $t_{i+1}$  selon les équations (2.2d) et (2.2e) :

$$\tau = \frac{\langle \delta\mathbf{x}^f(t_{i+1}); \delta\mathbf{x}^f(t_{i+1}) \rangle_{\mathcal{N}_{i+1}}}{\langle \delta\mathbf{x}(t_i); \delta\mathbf{x}(t_i) \rangle_{\mathcal{N}_i}} \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) peut donc s'exprimer comme seule fonction de  $\delta\mathbf{x}(t_i)$  :

$$\tau(\delta\mathbf{x}(t_i)) = \frac{(\mathbf{M}_i \delta\mathbf{x}(t_i))^T \mathcal{N}_{i+1} \mathbf{M}_i \delta\mathbf{x}(t_i)}{\delta\mathbf{x}(t_i)^T \mathcal{N}_i \delta\mathbf{x}(t_i)} \quad (2.8)$$

Ayant défini une norme  $\mathcal{N}_i$  à l'instant initial, il est possible de normaliser les structures  $\delta\mathbf{x}(t_i)$  que nous cherchons à déterminer. Trouver la perturbation normée  $\delta\mathbf{x}(t_i)$  qui donne le maximum de  $\tau(\delta\mathbf{x}(t_i))$  revient à trouver le maximum du numérateur de  $\tau$ , noté  $\tau'$ . La

détermination de cette perturbation peut se résumer en une recherche de facteurs propres. En effet,  $\tau'(\delta\mathbf{x}(t_i))$  s'écrit :

$$\tau'(\delta\mathbf{x}(t_i)) = \delta\mathbf{x}(t_i)^T \mathbf{M}_i^T \mathcal{N}_{i+1} \mathbf{M}_i \delta\mathbf{x}(t_i) \quad (2.9a)$$

$$= \delta\mathbf{x}(t_i)^T \mathcal{N}_i \mathcal{N}_i^{-1} \mathbf{M}_i^T \mathcal{N}_{i+1} \mathbf{M}_i \delta\mathbf{x}(t_i) \quad (2.9b)$$

$$= \langle \delta\mathbf{x}(t_i); \mathcal{N}_i^{-1} \mathbf{M}_i^T \mathcal{N}_{i+1} \mathbf{M}_i \delta\mathbf{x}(t_i) \rangle_{\mathcal{N}_i} \quad (2.9c)$$

La recherche des vecteurs singuliers se résume en la décomposition en facteurs propres de l'opérateur  $\mathcal{N}_i^{-1} \mathbf{M}_i^T \mathcal{N}_{i+1} \mathbf{M}_i$  (soit  $\mathbf{M}_i^* \mathbf{M}_i$ ). Ce qui revient à déterminer les vecteurs  $u_i$ , tels que :

$$\mathcal{N}_i^{-1} \mathbf{M}_i^T \mathcal{N}_{i+1} \mathbf{M}_i u_i = \lambda_i^2 u_i \quad (2.10)$$

$\lambda_i$  est appelée valeur singulière. Comme  $\mathcal{N}_i$  et  $\mathcal{N}_{i+1}$  sont définies positives,  $\mathcal{N}_i^{-1} \mathbf{M}_i^T \mathcal{N}_{i+1} \mathbf{M}_i$  l'est aussi et toutes les valeurs propres sont donc positives ou nulles (d'où leur écriture sous la forme  $\lambda_i^2$  dans l'équation 2.10). Les vecteurs propres de l'opérateur  $\mathbf{M}_i^* \mathbf{M}_i$  sont les vecteurs singuliers de  $\mathbf{M}_i$  et les coefficients  $\lambda_i$ , les valeurs singulières correspondantes. Les vecteurs singuliers ont une structure différente à  $t_i$  et à  $t_{i+1}$ , mais forment une base orthonormée de l'espace des phases à ces deux instants.

On peut déduire une zone sensible de ces vecteurs singuliers: il s'agit de la combinaison linéaire des structures les plus instables (vecteurs dont les valeurs singulières sont les plus élevées). Si seuls les deux premiers vecteurs sont considérés, on parle de plan instable (Bergot *et al.*, 1999 ; Aubert, 1999).

## Les normes

Dans le cadre de FASTEX, les normes utilisées dans les calculs des vecteurs singuliers étaient l'énergie totale ( $\mathcal{E}$ ) à l'instant  $t_i$  et l'entrophie ( $\Xi$ ) à l'instant  $t_{i+1}$ . La norme entrophie était calculée pour les niveaux aux environs de 850 hPa afin d'être représentative de tourbillons caractéristiques des cyclogenèses.

Pour information, on donne ici la formulation de l'énergie totale, ainsi que celle de l'entrophie, utilisées dans le modèle ARPEGE de Météo-France. L'énergie totale est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle x_1; \mathcal{E}x_2 \rangle &= \frac{1}{2} \iint_S \left( \int_0^1 (\nabla \Delta^{-1} \xi_1 \nabla \Delta^{-1} \xi_2 + \nabla \Delta^{-1} D_1 \nabla \Delta^{-1} D_2) \frac{\partial P}{\partial \eta} d\eta \right) dS \\ &+ \frac{1}{2} \iint_S \left( \int_0^1 \left( \frac{C_{pd}}{T_{ref}} T_1 T_2 \right) \frac{\partial P}{\partial \eta} d\eta \right) dS \\ &+ \frac{\alpha}{2} \iint_S \left( \int_0^1 \left( \frac{L_{vap}^2}{C_{pd} T_{ref}} Q_1 Q_2 \right) \frac{\partial P}{\partial \eta} d\eta \right) dS \\ &+ \frac{1}{2} \iint_S \frac{R_d T_{ref}}{P_{ref}} P_1^{surf} P_2^{surf} dS \end{aligned}$$

où  $\xi$  représente le tourbillon,  $D$  représente la divergence,  $T$  la température,  $Q$  l'humidité spécifique et  $P^{surf}$  la pression de surface.  $\eta$  donne la coordonnée verticale adimensionnelle,  $C_{pd}$  est le coefficient de chaleur massique de l'air sec,  $T_{ref}$  est la température de référence, prise égale à  $300\text{ K}$  et  $P_{ref}$  est la pression de surface de référence ( $80000\text{ Pa}$ ). Enfin,  $R_d$  est la constante des gaz parfaits (air sec) et  $S$  est la surface horizontale de la colonne d'atmosphère pour laquelle on procède à l'intégration volumique. Les indices  $_1$  et  $_2$  correspondent aux composantes des deux vecteurs  $x_1$  et  $x_2$ . Le coefficient  $\alpha$  dans le terme d'humidité spécifique (troisième terme) prend les valeurs 1 et 0, selon que l'on souhaite utiliser ce paramètre (ou non, respectivement) dans la définition de l'énergie totale.

La définition de l'énstrophie ( $\Xi$ ) est la suivante :

$$\langle x_1; \Xi x_2 \rangle = \frac{1}{2} \iint_S \left( \int_0^1 (\xi_1 \xi_2) \frac{\partial P}{\partial \eta} d\eta \right) dS \quad (2.12)$$

Par ailleurs, de nombreuses études ont été réalisées pour comprendre l'importance du choix des normes pour le calcul des vecteurs singuliers (Buizza et Palmer, 1995 ; Barkmeijer *et al.*, 1998 ; Palmer *et al.*, 1998). Il apparaît que dans le cas d'études diagnostiques sur les erreurs de prévisions, la métrique initiale adaptée est la matrice de variance-covariances des erreurs d'analyses. Cependant, l'énergie totale semble apporter de bons résultats. En effet, Palmer *et al.* (1998) montre que cette norme est une bonne approximation, à coût quasi nul, de la variance des erreurs d'analyse qui est la norme initiale idéale pour les problèmes de prévisibilité.

## Le calcul de gradient

La seconde approche utilisée durant FASTEX est dite **calcul de sensibilité**. Ce type de calcul cherche à déterminer l'effet d'une modification des conditions initiales sur un aspect de la prévision. Cet aspect de la prévision peut être toute fonction différentiable  $\mathcal{J}$  définie sur l'état prévu  $\mathbf{x}^f(t_{i+1})$  de l'atmosphère. On se focalise ainsi sur un aspect très particulier de la prévision.

Pour exemple, si  $\mathcal{J}$  est l'énergie totale précédemment définie dans l'équation (2.11),

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}^f(t_{i+1})) = \mathbf{x}^f(t_{i+1})^T \mathcal{E} \mathbf{x}^f(t_{i+1}) \quad (2.13)$$

Considérons à nouveau une perturbation  $\delta \mathbf{x}(t_i)$  de  $\mathbf{x}(t_i)$  qui définit  $\mathbf{x}'(t_i)$  à  $t_i$  et la prévision  $\mathbf{x}^{f'}(t_{i+1})$  à  $t_{i+1}$ . Le calcul de la fonction coût  $\mathcal{J}$  sur cette prévision perturbée s'écrit ainsi :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}^{f'}(t_{i+1})) = \mathcal{J}(\mathbf{x}^f(t_{i+1}) + \delta \mathbf{x}^f(t_{i+1})) \quad (2.14)$$

On note  $\Delta \mathcal{J}$ , la différence entre  $\mathcal{J}(\mathbf{x}^{f'}(t_{i+1}))$  et  $\mathcal{J}(\mathbf{x}^f(t_{i+1}))$ .

L'évaluation de  $\Delta \mathcal{J}$  pour différentes perturbations initiales informe sur la sensibilité de  $\mathcal{J}$  à  $\mathbf{x}(t_i)$ . L'approche par le gradient est cependant plus efficace. Le développement de Taylor

au premier ordre de l'expression (2.14) s'écrit :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}^{f'}(t_{i+1})) = \mathcal{J}(\mathbf{x}^f(t_{i+1})) + \delta\mathbf{x}^f(t_{i+1})^T \left( \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\mathbf{x}_{i+1}^f} \right) + \mathcal{O}(\delta\mathbf{x}^f(t_{i+1})^2) \quad (2.15)$$

où  $\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\mathbf{x}_{i+1}^f}$  est la dérivée au premier ordre de  $\mathcal{J}(\mathbf{x}^f(t_{i+1}))$ , par rapport à  $\mathbf{x}^f(t_{i+1})$ . La formulation (2.15), lorsqu'on néglige les termes de second ordre ( $\mathcal{O}(\delta\mathbf{x}^f(t_{i+1})^2)$ ), nous permet d'écrire :

$$\delta\mathcal{J} = \langle \delta\mathbf{x}^f(t_{i+1}) ; \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\mathbf{x}_{i+1}^f} \rangle \quad (2.16)$$

Sachant que  $\delta\mathbf{x}^f(t_{i+1}) = \mathbf{M}_i \delta\mathbf{x}(t_i)$ , d'après le développement donné dans (2.2),  $\delta\mathcal{J}$  s'écrit aussi :

$$\delta\mathcal{J} = \langle \mathbf{M}_i \delta\mathbf{x}(t_i) ; \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\mathbf{x}_{i+1}^f} \rangle \quad (2.17)$$

On peut dégager une expression de ce produit scalaire dont les termes sont définis à l'instant initial  $t_i$ , en faisant apparaître l'adjoint du modèle linéaire tangent.

$$\delta\mathcal{J} = \langle \mathbf{M}_i \delta\mathbf{x}(t_i) ; \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\mathbf{x}_{i+1}^f} \rangle \quad (2.18a)$$

$$= \langle \delta\mathbf{x}(t_i) ; \mathbf{M}_i^T \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\mathbf{x}_{i+1}^f} \rangle \quad (2.18b)$$

On en déduit alors directement l'expression du **gradient de  $\mathcal{J}$  par rapport aux conditions initiales  $\mathbf{x}(t_i)$** , qui est aussi désigné par **sensibilité de  $\mathcal{J}$  aux conditions initiales** :

$$\left[ \nabla_{\mathbf{x}(t_i)} \mathcal{J} = \mathbf{M}_i^T \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\mathbf{x}_{i+1}^f} \right] \quad (2.19)$$

Il est important de souligner que le calcul du gradient de  $\mathcal{J}$  par rapport aux conditions initiales nécessite l'intégration du modèle adjoint à partir des conditions données par  $\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\mathbf{x}_{i+1}^f}$ . Le champ de gradient est un champ dérivé dont la dimension physique n'est pas celle d'une perturbation du champ des conditions initiales. Cependant, l'utilisation d'une norme initiale adéquate rend au gradient la dimension physique d'une perturbation. En effet, soit  $X$  la dimension physique de  $\delta\mathbf{x}(t_i)$  et  $Q$  la dimension physique de  $\mathcal{J}$ ,  $\frac{Q}{X}$  est la dimension de  $\nabla_{\mathbf{x}(t_i)} \mathcal{J}$ . Si on définit une norme initiale telle que  $[\mathcal{N}_i] = \frac{1}{X^2}$  on a :

$$\mathbf{M}_i^* = \mathcal{N}_i^{-1} \mathbf{M}_i^T \quad (2.20)$$

et

$$\nabla_{\mathbf{x}(t_i)} \mathcal{J} |_{\mathcal{N}_i} = \mathcal{N}_i^{-1} \mathbf{M}_i^T \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\mathbf{x}_{i+1}^f} \quad (2.21)$$

La dimension physique du gradient aux conditions initiales exprimé par rapport à la norme  $\mathcal{N}_i$  sera donc :

$$\left[ \nabla_{\mathbf{x}(t_i)} \mathcal{J} |_{\mathcal{N}_i} \right] = X \times Q \quad (2.22)$$

On ne continuera pas à utiliser la notation  $|\cdot|_N$  pour préciser les normes vis-à-vis desquelles sont définis les adjoints et gradients utilisés dans les calculs. On supposera que l'on utilise la norme définie pour l'instant étudié que l'on précisera plutôt au niveau d'un calcul qu'au niveau de chaque expression. Dans les cas particuliers, bien sûr, on précisera la norme vis-à-vis de laquelle est exprimé un gradient.

### Le résultat du calcul adjoint

Le résultat du calcul de la sensibilité aux conditions initiales est un champ dont l'amplitude est d'autant plus grande que la prévision de  $\mathcal{J}$  est sensible au paramètre des conditions initiales concerné. Le modèle adjoint est dérivé du modèle de prévision numérique et le champ de gradient reflète ainsi la dynamique de l'atmosphère. La visualisation du gradient permet ainsi d'accéder à une information sur l'instabilité de la situation météorologique.

Les zones sensibles calculées avec les deux méthodes (vecteurs singuliers et gradients) montrent souvent de très fortes similitudes, à tel point que l'on considère assez aisément que les résultats obtenus (zones sensibles), soit par la méthode des sensibilités, soit par la méthode des vecteurs singuliers, sont très proches dans de nombreux cas. En effet, on peut montrer qu'en ce qui concerne les plus fortes amplifications, la majeure partie de la structure sensible obtenue par le calcul de sensibilité se projette sur les premiers vecteurs singuliers (Buizza et Palmer, 1995 ; Gelaro *et al.*, 1999); le gradient est ainsi une somme des vecteurs singuliers pondérés par leur valeur singulière.

### 2.1.3 Exemples de zones sensibles

Pour illustrer les propos précédents, on se propose de montrer un exemple de calcul de zone sensible sur un cas de FASTEX : la POI17. Dans le cas de cette POI17, dont les illustrations ci-dessous sont extraites, trois vols de ciblage ont été organisés successivement : le 17 février 1997 à 18h TU , puis le 18 février à 00h et enfin le même jour à 18h TU. On s'intéresse ici au premier vol du Gulfstream (noté **G-IV** dans la suite de ce mémoire), effectué le 17 février à 18h TU.

La zone d'intérêt est centrée sur le noyau de tourbillon de basses couches (niveaux 22 à 26 du modèle ARPEGE, ce qui correspond à la couche 800 *hPa*-930 *hPa* dans une atmosphère standard). Cette zone d'intérêt est délimitée par les coordonnées suivantes : 60°Nord, 45°Nord, 15°Ouest et 0°Ouest, à l'instant final,  $t_f$ , le 19 février à 12h TU. Ceci correspond à une prévision à 42 heures d'échéance.

Le calcul de sensibilité est identique aux calculs réalisés pendant FASTEX (Bergot, 1999). Les figures (2.1) et (2.2) montrent le résultat de la sensibilité de  $\mathcal{J}$  (enstrophie) aux conditions initiales de température. Dans une zone de sensibilité positive (respectivement négative), une augmentation de la température (respectivement diminution) aurait pour effet d'augmenter

l'enstrophie dans la prévision sur la zone d'intérêt, ce qui signifie une intensification du mouvement cyclonique et de la tempête, le 19 février 1997 à 12h TU.

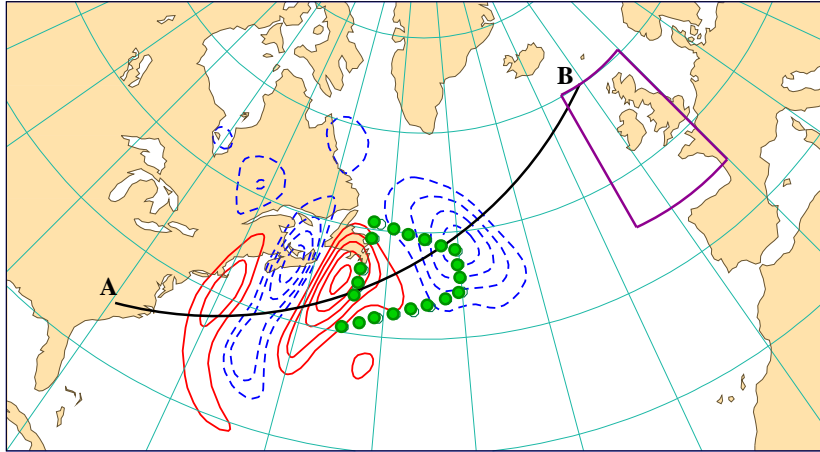


FIG. 2.1: Sensibilité aux conditions initiales de température pour la POI17, le 17 février 1997 à 18h TU. La fonction coût est l'enstrophie 42 heures plus tard (19 février à 12h) sur la boîte ( $60^{\circ}N$ ,  $45^{\circ}N$ ,  $15^{\circ}W$ ,  $0^{\circ}W$ ) représentée par le cadre au large de l'Europe et pour une couche d'atmosphère standard comprise entre 800 hPa et 930 hPa. Les isolignes pleins représentent des sensibilités positives, alors que les isolignes discontinus indiquent des sensibilités négatives. Les ronds représentent la position des dropsondes déployées par le Gulfstream IV sur ce cas. L'arc **A-B** situe l'axe de la coupe verticale de la figure (2.2).

La figure (2.2) montre une coupe verticale de cette structure sensible. Le segment le long duquel on a effectué cette coupe est représenté par l'arc **A-B** sur la figure (2.1). Ce plan de coupe débute au-dessus de la côte nord-américaine, au point ( $35^{\circ}$ Nord,  $80^{\circ}$ Ouest) et se termine entre l'Islande et la Grande Bretagne ( $60^{\circ}$ Nord,  $10^{\circ}$ Ouest).

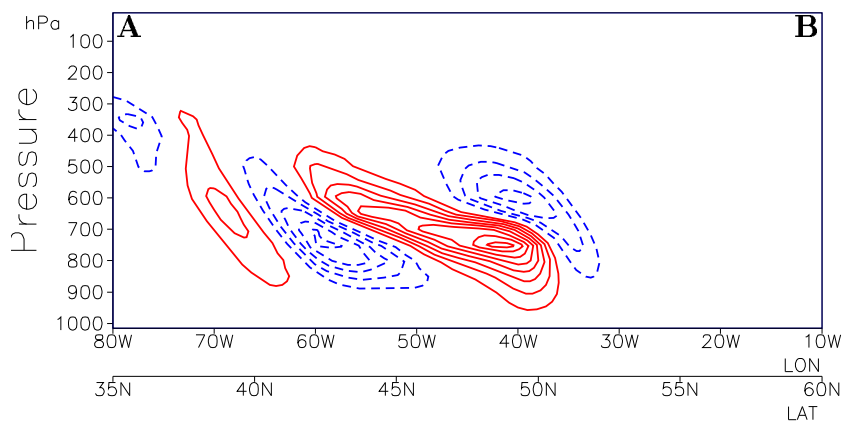


FIG. 2.2: Coupe verticale selon l'axe **A-B** de la figure (2.1).

L'examen de l'aspect tridimensionnel du gradient à l'instant initial montre une très



forte inclinaison de cette structure vers l'amont, avec la verticale (altitude). Par ailleurs, on constate que le maximum d'amplitude de ces structures sensibles se trouve vers 800 *hPa* (donc en basse couche). On retrouve ici des caractéristiques morphologiques classiques des champs de sensibilité (Rabier *et al.*, 1996) : un maximum d'amplitude dans les niveaux de la troposphère proches de 600-700 *hPa* et une forte inclinaison vers l'amont avec l'altitude (surtout dans les régions de fort flux zonal). C'est typique de structures baroclines à développement très rapide. La structure à l'instant final  $t_{i+1}$  a une allure plus barotrope (Farrell, 1990 ; Rabier *et al.*, 1996).

## 2.2 Sensibilité aux observations

L'étude systématique de l'impact des vols ciblés de FASTEX sur la prévision (Bergot, 2001) a clairement montré la très forte influence de l'algorithme d'assimilation sur l'efficacité des observations ciblées. D'autre part, il est aussi bien établi que des questions de représentativité ou de redondance d'information entre les observations sont intervenues lors FASTEX (Bergot, 2001 ; Langland *et al.*, 1999).

De ces deux conclusions, il apparaît nécessaire de prendre en compte les processus d'assimilation dans la définition de l'échantillonnage des zones sensibles. Pour ce faire, on se propose de prendre en considération dans le calcul des zones sensibles à la fois la formulation de l'algorithme d'assimilation qui utilisera les observations adaptatives ainsi que la position des observations conventionnelles. C'est un premier pas vers une optimisation d'un réseau adaptatif et c'est dans ce cadre que s'inscrit ce travail.

### 2.2.1 Contexte de l'assimilation de données

Par essence, l'approche de la sensibilité aux observations se place dans le cadre de l'assimilation des données. Dans cette partie, nous préciserons quelques notations nécessaires à la formalisation de l'approche en sensibilité aux observations. Ainsi, nous suivrons au plus près les notations de Ide *et al.* (1997). Cependant, nous généraliserons ce système de notation lorsqu'il ne permettra plus de répondre à nos besoins. Nous préciserons alors, les modifications de notation induites par nos choix (à partir de l'équation (2.49) de cette partie). L'annexe C répertorie toutes les notations de ce document et leur signification.

#### L'assimilation

Nous utilisons ici un formalisme emprunté à la théorie du Filtre de Kalman-Bucy (Kalman, 1960 ; Jaswinski, 1970 ; Brown, 1983), sans en donner tous les détails et hypothèses. Par assimilation des données (Courtier, 1997), on entend l'ensemble des processus qui permettent de combiner les informations disponibles afin d'avoir la représentation la plus juste de l'atmosphère. L'information relative au comportement physique du fluide atmosphérique est modélisée dans le modèle numérique et se traduit par une première estimation a priori de l'état de l'atmosphère à l'instant  $t_i$  que l'on appelle ébauche et qui est notée  $\mathbf{x}^b(t_i)$ . L'ébauche

est un vecteur de paramètres représentant l'atmosphère dans le modèle; soit  $n$  sa dimension. Il s'agit souvent d'une prévision à courte échéance issue de la précédente phase d'assimilation ( $\mathbf{x}^b(t_i) = \mathbf{x}^f(t_i) = M_{i-1 \rightarrow i} \mathbf{x}^f(t_{i-1})$ ).

Par ailleurs, on dispose d'un certain nombre de mesures qui ont été effectuées dans l'atmosphère réelle. Ces observations sont notées sous la forme du vecteur  $\mathbf{y}^o(t_i)$  et celui-ci est de dimension  $p$ .

Les observations effectuées sont entachées d'erreurs de mesure. On note  $\varepsilon$  ces erreurs vis-à-vis de la réalité  $\mathbf{x}^t(t_i)$  qui est inconnue. On dispose d'un opérateur appelé "opérateur d'observation direct" et noté  $H$ , qui permet d'exprimer un équivalent *observé* des paramètres *modélisés*. Cet opérateur peut représenter une interpolation spatio-temporelle entre les paramètres observés et les paramètres du modèle. Cet opérateur peut aussi prendre en compte des processus plus complexes, comme dans le cas des radiances satellites, par exemple, pour lesquelles il est nécessaire d'y inclure un modèle de transfert radiatif afin d'estimer le paramètre observé à partir des paramètres du modèle. Par définition de  $H$ , on peut écrire la relation :

$$\mathbf{y}^o(t_i) = H(\mathbf{x}^t(t_i)) + \varepsilon \quad (2.23)$$

Les erreurs  $\varepsilon$  ne sont pas connues, mais on dispose d'un certain nombre d'informations sur les statistiques de ces erreurs. Celles-ci prennent parfois la forme d'hypothèses qui sous-tendent le processus d'assimilation. Ainsi, les observations sont supposées non biaisées: l'espérance statistique des erreurs  $\varepsilon$  est nulle. En cas de biais connu, une première phase du processus d'assimilation consiste dans le débiaisage de ces mesures (cas des observations satellites, par exemple). De plus, la variance des erreurs d'observation s'écrit :

$$Var(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon^T) - E(\varepsilon)^2 \quad (2.24a)$$

$$= E(\varepsilon\varepsilon^T) \quad (2.24b)$$

$$= \mathbf{E} \quad (2.24c)$$

Dans les équations (2.24),  $Var$  représente la variance et  $E$  l'espérance mathématique des quantités entre parenthèses. On désigne par  $\mathbf{E}$  la matrice carrée qui contient la variance et les covariances des erreurs d'observations entre elles. Les effets de représentativité des paramètres de modèle par ces observations ont aussi une traduction en terme de statistiques d'erreur, soit  $\mathbf{F}$  la matrice de variance-covariances correspondante. La représentation statistique de  $\mathbf{R}$ , l'incertitude sur les observations ( $\mathbf{y}^o$ ) utilisées dans l'assimilation est donc la somme de ces différentes représentations:  $\mathbf{R} = \mathbf{E} + \mathbf{F}$ .

Si  $p$  est le nombre d'éléments du vecteur  $\mathbf{y}^o$ , la dimension de  $\mathbf{R}$ , matrice symétrique par construction, est  $p \times p$ .

D'autre part, on considère les erreurs présentes dans le champ de l'ébauche que l'on note  $\zeta^b = \mathbf{x}^b(t_i) - \mathbf{x}^t(t_i)$ . Ces erreurs sont supposées d'espérance statistique nulle ( $\mathbf{x}^b(t_i)$  est non biaisé) et la matrice symétrique de variance-covariances des erreurs de l'ébauche (de

dimension  $n \times n$ ) s'écrit :

$$\mathbf{B} = E(\zeta^b \zeta^{bT}) \quad (2.25)$$

Nous détaillerons les propriétés de ces matrices dans la partie 3.2.2. Il est cependant nécessaire de souligner dès à présent que dans les algorithmes d'assimilation utilisés pour la prévision numérique, les erreurs de l'ébauche  $\zeta^b$  sont supposées suivre une loi Normale (Lorenç, 1986) et que des corrélations (balances statistiques) existent entre les paramètres dynamiques et thermodynamiques du modèle (Bouttier *et al.*, 1997). En ce qui concerne les erreurs d'observation  $\varepsilon$ , il est considéré que les erreurs sont statistiquement indépendantes entre les différents appareils de mesure.

### Estimation de l'analyse

Compte tenu des hypothèses que nous avons données ci-dessus, on peut définir une nouvelle estimation de l'état de l'atmosphère appelée *analyse* et notée  $\mathbf{x}^a(t_i)$ . Cette estimation est définie par le BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) et s'exprime comme suit :

$$\mathbf{x}^a(t_i) = \mathbf{x}^b(t_i) + \mathbf{K} (\mathbf{y}^o(t_i) - H(\mathbf{x}^b(t_i))) \quad (2.26)$$

où l'opérateur  $\mathbf{K}$  est appelé *gain*.  $\mathbf{K}$  est une matrice rectangulaire ( $n \times p$ ). Cet opérateur dépend du réseau d'observations qui entre dans le processus d'assimilation et s'écrit

$$\mathbf{K} = (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \quad (2.27)$$

où  $\mathbf{H}$  est la linéarisation de  $H$  sur la base de l'état a priori,  $\mathbf{x}^b(t_i)$ . Dans l'équation (2.26), le vecteur  $\mathbf{d}(t_i) = (\mathbf{y}^o(t_i) - H(\mathbf{x}^b(t_i)))$  est appelé *vecteur d'innovation* et traduit l'écart qu'il existe entre les valeurs mesurées et leur équivalent dans l'ébauche.

Le *gain* peut s'écrire différemment selon que l'inversion des matrices se fait dans l'espace modèle (cas de l'équation (2.27) ci-dessus : la matrice  $(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})$  à inverser est de dimension  $n \times n$ ) ou dans l'espace des observations (dimension  $p \times p$ ). On démontre aisément (Talagrand, 1997) que le *gain* peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\mathbf{K} = \mathbf{B} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (2.28)$$

### La prévision

Pour effectuer le lien entre les observations et la prévision, considérons à présent que les conditions initiales, notées  $\mathbf{x}(t_i)$  précédemment, sont désormais l'analyse  $\mathbf{x}^a(t_i)$  qui est calculée selon la formulation (2.26). En combinant les équations (2.26) et (2.1) on obtient la relation suivante, entre l'ébauche, les observations et la prévision :

$$\mathbf{x}^f(t_{i+1}) = M_{i \rightarrow i+1} [\mathbf{x}^b(t_i) + \mathbf{K} (\mathbf{y}^o(t_i) - H(\mathbf{x}^b(t_i)))] \quad (2.29)$$

Dans la figure (2.3), on replace les différents éléments du processus d'assimilation-prévision et de calcul de la fonction  $\mathcal{J}$ . La combinaison de l'ébauche  $\mathbf{x}^b(t_i)$  et des observations  $\mathbf{y}^o(t_i)$  génère l'analyse  $\mathbf{x}^a(t_i)$ . De celle-ci découle une prévision pour l'instant  $t_{i+1}$  à l'aide du modèle de prévision numérique  $M_{i \rightarrow i+1}$ . Sur cette prévision  $\mathbf{x}^f(t_{i+1})$  à  $t_{i+1}$ , on calcule une fonction coût  $\mathcal{J}$ .

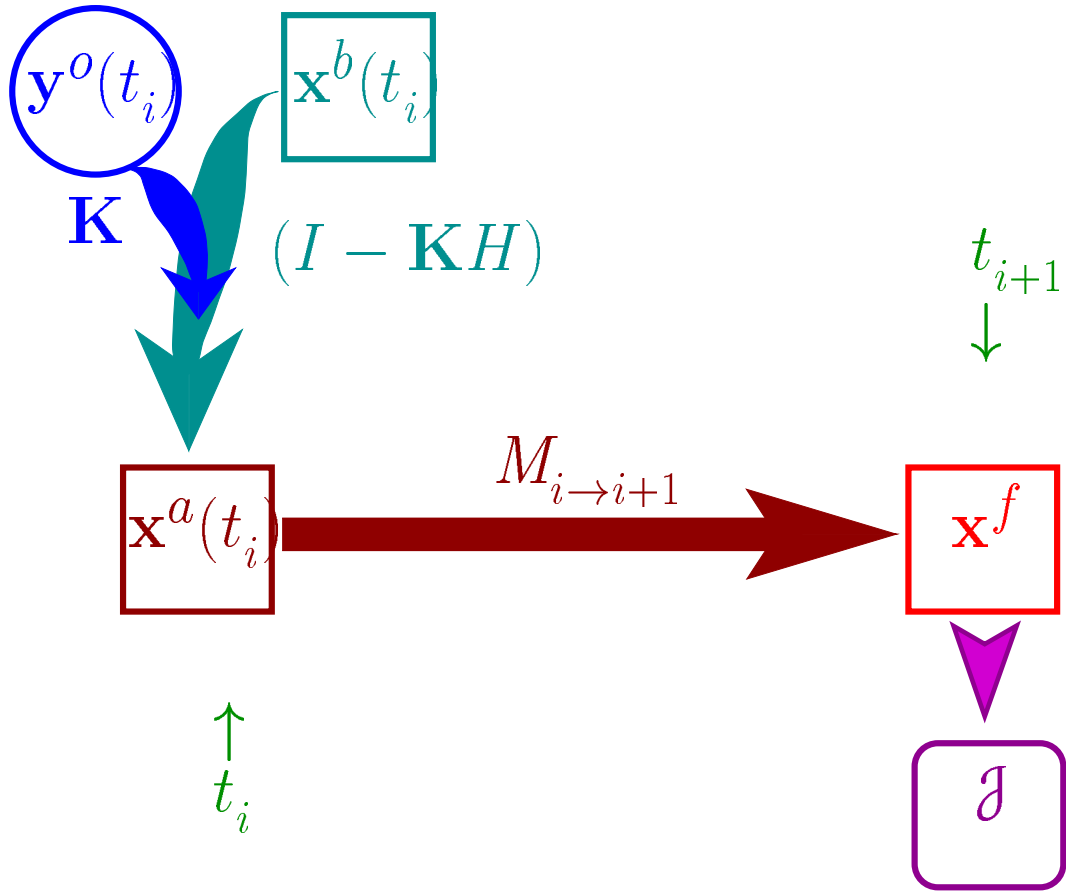


FIG. 2.3: Récapitulatif des étapes du processus d'assimilation-prévision et de calcul de  $J$ . Les boîtes carrées contiennent des champs du modèle (de dimension  $n$ ), les boîtes à coins arrondis figurent des scalaires (dimension 1) et le cercle figure les observations (dimension  $p$ ). Les processus d'assimilation sont représentés en bleu et cyan. La prévision est en rouge sombre et la flèche d'intégration du modèle de prévision numérique montre aussi le temps. L'évaluation de la prévision par la fonction coût est la phase magenta.

### Linéarisation des processus d'analyse-prévision

À présent, considérons une perturbation  $\delta y^o(t_i)$  des valeurs observées par les dispositifs de mesure ( $\mathbf{y}' = \mathbf{y}^o(t_i) + \delta y^o(t_i)$ ). D'après l'équation (2.26), la perturbation  $\delta x^a(t_i)$  de l'analyse  $x^a(t_i)$  ainsi générée est donnée par :

$$\delta x^a(t_i) = \mathbf{K} \delta y^o(t_i) \quad (2.30)$$

De même, en supposant qu'une variation  $\delta x^b(t_i)$  vérifie  $H(\mathbf{x}^b(t_i) + \delta x^b(t_i)) = H(\mathbf{x}^b(t_i)) + \mathbf{H} \delta x^b(t_i)$ , la variation  $\delta x^a(t_i)$  de l'analyse générée par  $\delta x^b(t_i)$  est :

$$\delta x^a(t_i) = (I_n - \mathbf{K}\mathbf{H}) \delta x^b(t_i) \quad (2.31)$$

où  $I_n$  est la matrice identité de dimension  $n \times n$ . Compte tenu des équations (2.30) et (2.31) et de la linéarisation du modèle de prévision, on peut directement exprimer la variation de prévision  $\delta x^f(t_{i+1})$  comme un effet d'une variation de l'ébauche ( $\delta x^b(t_i)$ ) ou d'une variation

des valeurs observées ( $\delta \mathbf{y}^o(t_i)$ ):

$$\delta \mathbf{x}^f(t_{i+1}) = \mathbf{M}_i (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}\mathbf{H}) \delta \mathbf{x}^b(t_i) \quad (2.32a)$$

ou encore

$$\delta \mathbf{x}^f(t_{i+1}) = \mathbf{M}_i \mathbf{K} \delta \mathbf{y}^o(t_i) \quad (2.32b)$$

### 2.2.2 Sensibilité aux conditions primordiales à l'assimilation

Par conditions primordiales à l'assimilation, nous entendons ici les informations d'entrée de ce processus. Ce terme rassemble donc les observations et l'ébauche sous cette même désignation. De plus, les équations (2.32a) et (2.32b) montrent qu'en matière d'impact sur l'analyse on peut considérer parallèlement et de façon indépendante l'effet d'une modification des valeurs des observations, d'une part et des valeurs de l'ébauche, d'autre part.

Nous utiliserons donc cette propriété pour définir respectivement les notions de sensibilité aux observations, puis de sensibilité à l'ébauche.

#### Sensibilité aux observations

Il est possible, comme dans le cas de l'équation (2.16) d'estimer  $\delta \mathcal{J}$  par un développement de Taylor au premier ordre :

$$\delta \mathcal{J} = \langle \delta \mathbf{x}^f(t_{i+1}) ; \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}_{i+1}^f} \rangle \quad (2.33)$$

Ceci revient, nous l'avons vu, à écrire :

$$\delta \mathcal{J} = \delta \mathbf{x}^f(t_{i+1})^T \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}_{i+1}^f} \quad (2.34)$$

Si nous nous focalisons sur l'expression (2.32b), c'est-à-dire que nous considérons uniquement l'effet sur la prévision de la variation d'une valeur observée (pour une observation, cela donne une estimation quantitative de son importance pour la prévision), l'expression (2.34) peut être reformulée ainsi :

$$\delta \mathcal{J} = (\mathbf{M}_i \mathbf{K} \delta \mathbf{y}^o(t_i))^T \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}_{i+1}^f} \quad (2.35)$$

Ceci revient à écrire :

$$\delta \mathcal{J} = \delta \mathbf{y}^o(t_i)^T \mathbf{K}^T \mathbf{M}_i^T \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}_{i+1}^f} \quad (2.36)$$

Nous y reconnaissons l'expression de  $\nabla_{\mathbf{x}(t_i)} \mathcal{J}$  de l'équation (2.19). Dans le cas présent,  $\mathbf{x}(t_i)$  n'est autre que  $\mathbf{x}^a(t_i)$ .  $\nabla_{\mathbf{x}(t_i)} \mathcal{J}$  et  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  représentent donc le gradient de  $\mathcal{J}$  aux mêmes conditions initiales et nous obtenons donc :

$$\delta \mathcal{J} = \delta \mathbf{y}^o(t_i)^T \mathbf{K}^T \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \quad (2.37)$$

En suivant le même principe que pour la définition de la sensibilité de la prévision aux conditions initiales  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  (cf. équations 2.18), nous pouvons dégager une expression de la sensibilité de  $\mathcal{J}$  aux observations  $\mathbf{y}^o(t_i)$  utilisées lors du processus d'assimilation :

$$\delta \mathcal{J} = \delta \mathbf{y}^o(t_i)^T \mathbf{K}^T \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \quad (2.38a)$$

$$= \langle \delta \mathbf{y}^o(t_i) ; \mathbf{K}^T \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \rangle \quad (2.38b)$$

$$= \langle \delta \mathbf{y}^o(t_i) ; \nabla_{\mathbf{y}^o} \mathcal{J} \rangle \quad (2.38c)$$

où  $\langle ; \rangle$  représente le produit scalaire euclidien. On déduit naturellement la **sensibilité aux observations** :

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{y}^o} \mathcal{J} = \mathbf{K}^T \mathbf{M}_i^T \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}_{i+1}^T} = \mathbf{K}^T \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}} \quad (2.39)$$

La sensibilité à toutes les observations qui sont utilisées dans le processus d'assimilation se dérive donc assez clairement de la sensibilité aux conditions initiales à l'aide de l'opérateur  $\mathbf{K}^T$  qui est l'adjoint du *gain*, c'est-à-dire l'adjoint de "l'opérateur d'assimilation". Cette approche a été utilisée dans un cadre simplifié par Baker et Daley (Baker et Daley, 2000).

Il est intéressant de rappeler ici que le *gain*  $\mathbf{K}$  est une matrice rectangulaire appliquée à un vecteur dans l'espace des observations (dimension  $p$ ) et dont résulte l'analyse exprimée dans l'espace du modèle (dimension  $n$ ). L'adjoint de cet opérateur s'applique donc à une sensibilité par rapport à un vecteur d'état du modèle (dimension  $n$ ) pour exprimer une sensibilité vis-à-vis d'un vecteur d'observation (dimension  $p$ ).

### Sensibilité à l'ébauche

L'approche précédente peut être reconduite à partir de l'équation (2.32a). On considère alors l'effet d'une modification du champ de l'ébauche sur la prévision. En ce sens, on cherche à détecter à quels paramètres de l'ébauche, la fonction  $\mathcal{J}$  sera la plus sensible. Dans cette approche de détection de sensibilité de  $\mathcal{J}$  à  $\mathbf{x}^b(t_i)$ , l'opérateur linéarisé de l'assimilation est  $(\mathbf{I}_n - \mathbf{KH})$ . La sensibilité de  $\mathcal{J}$  à  $\mathbf{x}^b(t_i)$  s'écrit donc naturellement

$$\nabla_{\mathbf{x}^b} \mathcal{J} = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})^T \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \quad (2.40)$$

soit

$$\nabla_{\mathbf{x}^b} \mathcal{J} = \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} - \mathbf{H}^T \mathbf{K}^T \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \quad (2.41a)$$

$$= \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} - \mathbf{H}^T \nabla_{\mathbf{y}^o} \mathcal{J} \quad (2.41b)$$

Il apparaît que cette grandeur, appelée *sensibilité à l'ébauche*, est la différence entre la sensibilité aux conditions initiales et la sensibilité aux observations exprimée dans l'espace du modèle après application de l'adjoint de l'opérateur d'observation.

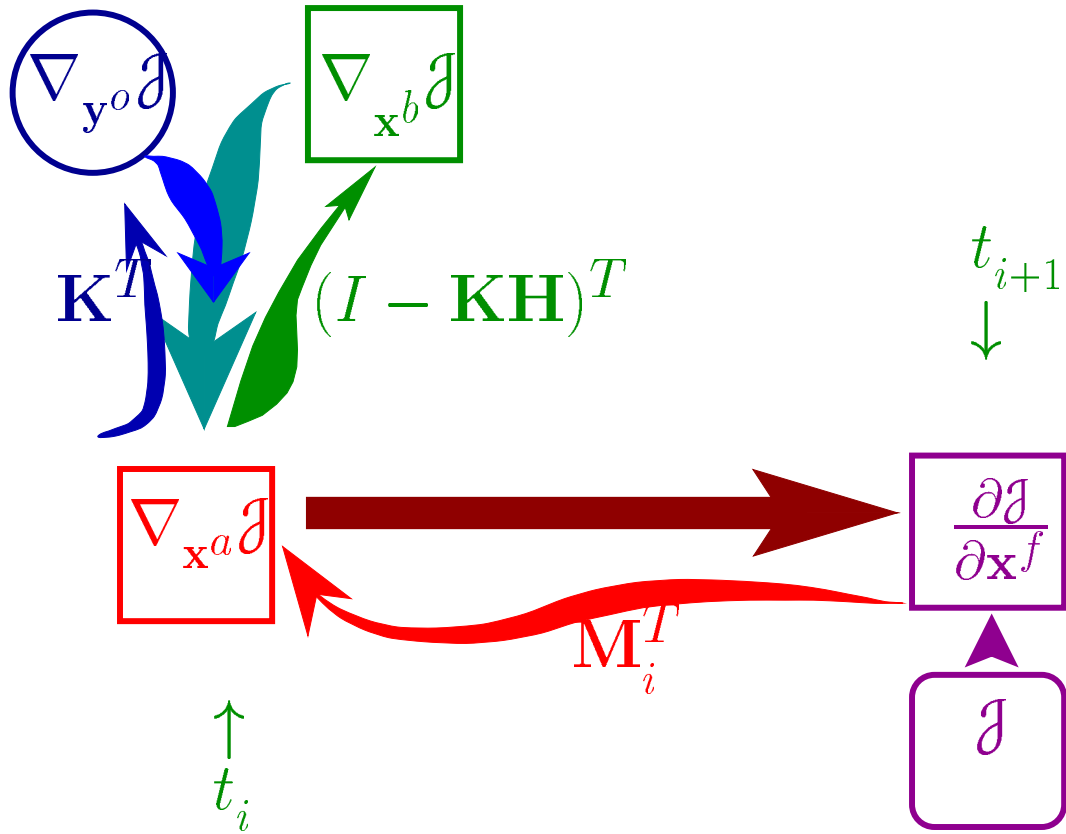


FIG. 2.4: Récapitulatif des étapes du processus de calcul de la sensibilité de  $\mathcal{J}$  à  $\mathbf{y}^o(t_i)$ . Les opérateurs directs ne sont pas notés, seules les étapes adjointes sont précisées. Les boîtes contiennent des sensibilités de  $\mathcal{J}$  aux champs qui leur correspondent dans la figure (2.3). La partie dans les tons pourpre et magenta s'identifie donc aux calculs de sensibilité classique (sensibilité d'un aspect de la prévision à ses conditions initiales). La partie verticale sur la gauche (à l'instant initial  $t_i$ ) traite des adjoints des opérateurs d'assimilation pour aboutir à la sensibilité aux observations ou à la sensibilité à l'ébauche.

### Les étapes du calcul de la sensibilité aux observations

La figure (2.4) reprend les mêmes éléments que la figure (2.3) d'assimilation-prévision précédente. On y a ajouté les flèches représentant l'utilisation d'opérateurs adjoints.

La formulation de la sensibilité aux observations peut être détaillée en utilisant l'expression de la matrice de *gain*  $\mathbf{K}$  de l'équation (2.27) dont on prend la transposée. Pour cela il est intéressant de rappeler les propriétés de symétrie des matrices de variance-covariances des erreurs de l'ébauche et d'observation ( $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{R}$ , respectivement) qui sont donc auto-adjointes.

L'adjoint du *gain* ( $\mathbf{K}^T$ ) s'exprime alors ainsi :

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})^{-1} \quad (2.42)$$

En substituant  $\mathbf{K}^T$  dans l'équation (2.39) par son expression donnée dans l'équation (2.42), on obtient la formulation suivante :

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{y}^o} \mathcal{J} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})^{-1}\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}} \quad (2.43)$$

Parallèlement, en utilisant la formulation duale de l'équation (2.28), l'adjoint du *gain* s'écrit :

$$\mathbf{K}^T = (\mathbf{HBH}^T + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{HB} \quad (2.44)$$

On retrouve ainsi la formulation de la sensibilité aux observations utilisée par N. Baker (Baker et Daley, 2000) :

$$\nabla_{\mathbf{y}^o}\mathcal{J} = (\mathbf{HBH}^T + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{HB}\nabla_{\mathbf{x}^a}\mathcal{J} \quad (2.45)$$

L'examen de l'équation (2.43) montre que la sensibilité aux observations dépend des variances et covariances décrites dans  $\mathbf{B}$ , responsables de la répartition spatiale de l'information contenues dans les observations vers l'espace modèle. Cependant, l'adjoint de l'opérateur d'assimilation comporte un élément dont le calcul numérique direct n'est pas sans poser un problème. En effet dans les algorithmes d'assimilation-prévision du temps, les matrices correspondant à  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}^T$  ne sont pas connues explicitement d'autant plus que leurs dimensions élevées interdit toute tentative de stockage. Dans ce contexte, l'estimation de l'inverse de  $(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})$  pose un réel problème, d'autant plus que c'est cet inverse qui contient le maximum d'information sur l'effet de l'assimilation. Il peut être aisément démontré que cet inverse correspond, en théorie, à la matrice de variance-covariances des erreurs d'analyse, si les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{R}$  sont correctement spécifiées. Si nous notons  $\zeta^a$ , ces erreurs d'analyse ( $\zeta^a = \mathbf{x}^a(t_i) - \mathbf{x}^t(t_i)$ ), sachant que l'analyse  $\mathbf{x}^a(t_i)$  formulée selon le BLUE (2.26) est non biaisée par définition ( $E(\zeta^a) = 0$ ), la matrice  $\mathbf{A}$  de variance-covariances des erreurs d'analyse s'écrit :

$$\mathbf{A} = \text{Var}(\zeta^a \zeta^{aT}) = (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})^{-1} \quad (2.46)$$

Il est intéressant de noter que du fait des propriétés de symétrie de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{A}$  bénéficie aussi du caractère auto-adjoint. On peut donc écrire l'adjoint du *gain*

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{HA} \quad (2.47)$$

et la sensibilité aux observations sous une forme plus condensée que (2.43)

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{y}^o}\mathcal{J} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{HA}\nabla_{\mathbf{x}^a}\mathcal{J}} \quad (2.48)$$

Enfin, toute la démarche de la sensibilité aux observations et à l'ébauche en partant directement des observations et de l'ébauche est récapitulée dans la figure (2.5) qui est la synthèse des figures (2.3) et (2.4).

Sur la figure (2.5), il apparaît très clairement qu'il est nécessaire de procéder à l'assimilation des données  $\mathbf{y}^o$ , de manière à estimer  $\mathbf{A}$  (respectivement  $\mathbf{K}^T$ ), avant de pouvoir calculer la sensibilité à ces mêmes observations. Cette approche peut donc être facilement utilisée dans une démarche diagnostique (réalisée postérieurement à la prise de mesure) puisque les valeurs observées aussi bien que la position exacte de toutes les observations et leurs statistiques d'erreurs sont disponibles. On peut cependant remarquer que seules les positions et



$$\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} \mathbf{y}^o(t_i) \\ \mathbf{x}^b(t_i) \end{bmatrix} \xrightarrow[(I_n - \mathbf{K}\mathbf{H})]{\mathbf{K}} \mathbf{x}^a(t_i) \xrightarrow{M_{i \rightarrow i+1}} \mathbf{x}^f(t_{i+1}) \\
\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{y}^o} \mathcal{J} \\ \nabla_{\mathbf{x}^b} \mathcal{J} \end{bmatrix} \xleftarrow[(I_n - \mathbf{K}\mathbf{H})^T]{\mathbf{K}^T} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \xleftarrow{M_i^T} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}_{i+1}^f}
\end{array}$$

FIG. 2.5: Principe de la sensibilité de la prévision aux observations (les flèches vers la droite signifient un processus direct, les flèches vers la gauche un processus adjoint).

statistiques d'erreur sont nécessaires, en théorie, à l'estimation de  $\mathbf{A}$  (respectivement  $\mathbf{K}$ ). Il est très important de souligner que de par sa formulation la sensibilité aux observations ne repose théoriquement pas sur la connaissance des valeurs observées aux points d'observation. Seules sont nécessaires les statistiques sur les erreurs d'observation et de l'ébauche, ainsi que la répartition spatiale des observations.

### Sensibilité et observations ciblées

Jusqu'à présent nous n'avons pas formalisé de différence entre les observations dites *conventionnelles* et les observations dites *ciblées*. Or, dans une optique de ciblage des observations, nous ne nous intéressons qu'à un petit nombre d'observations (celles qui sont ciblées, en l'occurrence). Il nous faut donc détailler la structure du vecteur d'observation  $\mathbf{y}^o$ . Il suffit de supposer que les premières  $p_t$  observations sont les observations effectuées par les plates-formes de ciblage et que les  $p_c$  suivantes sont des observations conventionnelles. En effet, aucune condition préalable de classement n'est nécessaire au sein du vecteur d'observation. On a la relation  $p = p_c + p_t$  où l'indice  $c$  signifie *conventionnel* et l'indice  $t$  signifie *ciblé*. C'est pour pouvoir effectuer une telle distinction, par un système d'indices simples, que nous ne suivons pas les conventions d'écriture de Ide *et al.* (1997) pour les vecteurs et opérateurs qui traitent ou qui dépendent d'une certaine façon de la nature du réseau d'observation (ciblé ou non). On renvoie le lecteur à l'annexe C pour la description des notations. Le vecteur  $\mathbf{y}^o$  se décompose ainsi :

$$\mathbf{y}^o = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_c \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

De même, les opérateurs d'observation peuvent être reformulés ainsi :

$$H = \begin{pmatrix} H_t & H_c \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

et la version linéarisée est naturellement  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_t & \mathbf{H}_c \end{pmatrix}$ . Cette démarche peut aussi s'appliquer à la sensibilité aux observations si on définit un vecteur de sensibilité aux observations ciblées, de dimension  $p_t$  et un autre vecteur de sensibilité aux observations conventionnelles de dimension  $p_c$ .

Pour cela, il nous faut supposer une indépendance statistique entre les erreurs des observations ciblées et les erreurs des observations conventionnelles. Pour ce qui est des erreurs de

mesure, cette hypothèse paraît très naturelle, puisque les dispositifs de mesures entre observations ciblées et observations conventionnelles sont différents. Cependant, la question de la représentativité est moins évidente, car il arrive que des observations ciblées soient déployées à proximité d'observations conventionnelles. Ce type de raffinement de la matrice  $\mathbf{R}$  n'est cependant pas effectué, même entre types d'observations conventionnelles au sein des systèmes d'assimilation-prévision utilisés actuellement à Météo-France. Nous supposons donc qu'il n'y a aucune corrélation entre les erreurs des observations ciblées ou conventionnelles.

Ainsi la matrice  $\mathbf{R}$  est au moins bloc-diagonale et s'écrit :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_t & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_c \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Bien que  $H$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{R}$  puissent aisément s'écrire dans la distinction entre observations conventionnelles et ciblées, ce n'est pas autant le cas de la matrice de *gain*. En effet, la présence de  $\mathbf{A}$  empêche une telle écriture (cf. équations 2.46 et 2.47). Lorsque les deux types de réseaux d'observations sont assimilés simultanément dans le système, nous utiliserons la notation  $\mathbf{A}_{ct}$  et  $\mathbf{K}_{ct}$  pour décrire respectivement la matrice de variance-covariances d'analyse et le *gain*. Logiquement,  $\mathbf{A}_t$  et  $\mathbf{K}_t$  signifient que seules les observations ciblées ont été utilisées dans le processus.  $\mathbf{A}_c$  et  $\mathbf{K}_c$  signifient, quant à elles, qu'aucune observation ciblée n'a été assimilée en plus des observations conventionnelles. La décomposition de la sensibilité entre observations conventionnelles et observations ciblées s'écrit en définitive :

$$\nabla_{y_o} \mathcal{J} = \begin{bmatrix} \nabla_{y_c} \mathcal{J} \\ \nabla_{y_t} \mathcal{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{H}_c(\mathbf{A}_{ct}) \mathbf{M}_i^T \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}_{i+1}^f} \\ \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{H}_t(\mathbf{A}_{ct}) \mathbf{M}_i^T \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}_{i+1}^f} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

La sensibilité de la prévision aux observations ciblées est donc fonction des observations conventionnelles si les deux types d'observations sont assimilés en même temps. En effet, la seconde composante de l'équation (2.52) qui décrit la sensibilité aux observation ciblées, contient  $\mathbf{A}_{ct}$  qui est fonction des deux réseaux combinés d'observation. Ceci démontre donc que l'efficacité d'un réseau d'observations ciblées dépend aussi du déploiement d'observations conventionnelles.

## 2.3 Exemples simples

Dans cette partie nous illustrerons quelques propriétés de la sensibilité aux observations à l'aide d'exemples numériques très simples. Ceci permettra de bien mettre en lumière certaines propriétés caractéristiques, alors que l'utilisation dans le cadre extrêmement complexe de la prévision numérique ne le permet pas.

Les propriétés qui seront mises en évidence ici auront essentiellement trait à l'influence des covariances constitutives de certains opérateurs (notamment  $\mathbf{A}$ ) intervenant dans le calcul de la sensibilité aux observations. Ces covariances prennent généralement le nom de *fonctions de structure* dans les matrices de variance-covariances des erreurs d'estimation de la réalité par les vecteurs d'état du modèle. Nous illustrerons ainsi le lien entre l'extension spatiale de

la sensibilité aux observations ciblées et la portée des covariances des erreurs de l'ébauche décrites dans la matrice  $\mathbf{B}$ .

Le schéma d'assimilation utilisé sera directement basé sur la formulation du BLUE (cf. équation 2.26). Ces expériences n'auront pas de dimension temporelle : on ne considèrera pas l'étape de la prévision. En conséquence, la sensibilité aux conditions initiales sera établie de façon arbitraire. Nous ne développerons donc pas de modèle de prévision numérique, ni de modèle linéaire-tangent correspondant, ni d'adjoint de celui-ci. Nous nous focaliserons sur la partie "assimilation" de la figure (2.4) et sur l'opérateur adjoint associé.

Le vecteur d'état décrira ce qui pourrait être un paramètre sur une colonne d'atmosphère. Les points de grille de la discrétisation de cette colonne d'atmosphère correspondront à des niveaux verticaux. La faible dimension des éléments manipulés dans ce contexte nous permettra d'exprimer explicitement les matrices correspondant aux différents opérateurs intervenant dans le schéma d'assimilation.

### 2.3.1 Contexte de l'étude

Soit  $\mathbf{x}$  le vecteur d'état de dimension  $n$  du modèle en points de grille. Nous utiliserons  $n = 50$  dans ces exemples simples. Les paramètres qui composent  $\mathbf{x}$  s'écrivent :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \quad (2.53)$$

D'un point de vue similaire, soit  $\mathbf{y}^\circ$  le vecteur d'observations de dimension  $p$ . On peut supposer que, comme dans la réalité de la prévision numérique du temps,  $p$  est beaucoup plus faible que  $n$ . De la même façon que précédemment,  $\mathbf{y}^\circ$  s'écrit :

$$\mathbf{y}^\circ = \begin{bmatrix} y_1^\circ & y_2^\circ & \dots & y_k^\circ & \dots & y_p^\circ \end{bmatrix}^T \quad (2.54)$$

En suivant ces notations,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont toutes deux des matrices symétriques de dimension  $n \times n$ . D'autre part, nous supposons que la matrice  $\mathbf{R}$ , de dimension  $p \times p$ , est diagonale. C'est une hypothèse forte mais qui est utilisée dans le cadre de l'assimilation opérationnelle. Elle implique que toutes les erreurs de mesure sont décorrélées les unes des autres, même si c'est un capteur identique qui est utilisé pour explorer et échantillonner toute une verticale de l'atmosphère par exemple (cas des sondages atmosphériques) ou différents points (cas des satellites). Elle implique aussi qu'aucun problème de représentativité n'intervient.

Cependant, les variances des erreurs d'observation changent selon le type et la localisation de la mesure (sur la verticale par exemple). Cette formulation est proche de la réalité : une même sonde est supposée faire des mesures moins précises (plus forte variance des erreurs de mesure) au sommet de l'atmosphère ou à proximité du sol, et plus précises aux niveaux moyens de l'atmosphère.

Nous noterons  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  les composantes des matrices de variance-covariances des erreurs qui correspondent à la  $i^e$  colonne et à la  $j^e$  ligne de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , respectivement.  $b_{ij}$  est la covariance des erreurs sur  $x_i$  avec les erreurs sur  $x_j$ , dans le cas où  $\mathbf{x}$  est l'ébauche. Les termes diagonaux (ie.  $i = j$ ) représentent les variances; les autres termes sont les covariances. Nous noterons  $\sigma_k^2$  est le  $k^e$  élément de la diagonale de  $\mathbf{R}$ .

### 2.3.2 Observation directe de tous les paramètres du modèle

Pour un premier exemple, plaçons-nous dans le cas où la grille de discrétisation du modèle est identique au système d'observation dont toutes les variances d'erreur sont identiques ( $\mathbf{R} = \sigma^2 I_p$ , où  $I_p$  est la matrice identité de dimension  $p \times p$ ). Ce cas ne nécessite pas d'illustration numérique puisque nous pouvons montrer analytiquement un certain nombre de résultats.

Dans ce cas particulier de système d'observation, les dimensions de l'espace modèle  $n$  et de l'espace des observations  $p$  sont identiques. L'opérateur d'observation correspond à une substitution directe et la matrice correspondante est l'identité ( $\mathbf{H} = I_n$ ). Nous savons par ailleurs que  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{R}$  sont symétriques et donc auto-adjointes. Nous pouvons donc souligner la propriété analytique suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{A} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^T &= \mathbf{R}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{A} \\ &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} \\ &= \mathbf{K} \end{aligned} \tag{2.56}$$

$\mathbf{R}$  étant multiple de l'identité  $I_p$  ( $\mathbf{R} = \sigma^2 I_p$ ),  $\mathbf{R}^{-1}$  l'est aussi ( $\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} I_p$ ) et peut alors commuter avec  $\mathbf{A}$  dans l'équation (2.56).  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}^T$  sont alors le même opérateur. Les effets de  $\mathbf{K}$  sur le vecteur d'innovation (dans le processus direct d'analyse) sont les mêmes que les effets de  $\mathbf{K}^T$  sur la sensibilité aux conditions initiales dans le processus adjoint de calcul de la sensibilité aux observations.

Ce résultat de comportement *symétrique* de ces opérateurs ne se limite pas au cas où il y a identité entre les points d'observation et la discrétisation du modèle. Cependant, dans des cas plus complexes, il est nécessaire de passer par des exemples numériques. Pour l'illustrer par la suite, nous allons utiliser les propriétés simplificatrices des expériences à une seule observation. Avec une seule observation, il est possible de caractériser l'effet de  $\mathbf{K}$  ou de  $\mathbf{K}^T$  au travers des fonctions de structure contenues dans  $\mathbf{B}$  (Thépaut *et al.*, 1996) que l'on cherchera à retrouver dans l'incrément d'analyse (cas direct) d'une part, puis dans la sensibilité à l'observation unique (cas adjoint), d'autre part.

### 2.3.3 Observation unique sur un point de grille du modèle (sans schéma d'interpolation)

À présent, considérons une observation unique qui est effectuée à la même localisation qu'un niveau  $i$  de la grille du modèle. Tout d'abord, nous supposons que le schéma d'interpolation est réduit à la plus simple expression possible : la substitution. Ceci conduit à un opérateur linéaire d'observation de la forme :

$$\mathbf{H} = [0 \dots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1} 0 \dots 0] \quad (2.57)$$

Cela signifie que l'information de l'observation est transférée sur le  $i^e$  point de grille, uniquement. De même l'équivalent observé au niveau  $i$  du modèle est  $x_i$  (noté  $\mathbf{x}_i^b$  pour l'ébauche). L'observation n'a aucune influence sur les autres niveaux de la grille par le schéma d'interpolation (ou opérateur d'observation).

En appliquant la formule de Sherman-Morrison-Woodbury (Hager, 1989) à  $\mathbf{A}$  (équation 2.46), on obtient :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H}\mathbf{B} \quad (2.58)$$

Ceci conduit à l'expression suivante pour les composantes de  $\mathbf{A}$  :

$$[a_{jk}] = \left[ b_{jk} - \frac{b_{ji} b_{ik}}{\sigma_i^2 + b_{ii}} \right] \quad (2.59)$$

En écriture matricielle et avec le système de discrétisation que nous avons adopté ici, les fonctions de structure de  $\mathbf{A}$  se définissent comme les  $n$  fonctions de dimension  $n$ , données par  $[a_{jk}]_{k=1,n}$  où  $j$  varie de 1 à  $n$ . On notera que ces fonctions correspondent à des colonnes ou à des lignes de cette matrice symétrique.

De façon équivalente, la fonction de structure de  $\mathbf{B}$  correspondant au paramètre  $i$  sera notée  $[b_{ik}]_{k=1,n}$ .

#### Cas direct : Assimilation d'une observation unique

Le champ analysé se calcule comme  $\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + \mathbf{A}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{d}$  (cf. équation 2.26). Compte tenu de la formulation de  $\mathbf{H}$ , le vecteur d'innovation  $\mathbf{d}$  se simplifie à une composante unique  $d_i$  ( $d_i = (y_i^o - \mathbf{x}_i^b)$ ) et l'assimilation d'une observation unique produit l'incrément d'analyse suivant ( $\delta\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b$ ) :

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}^a &= \left[ \left( b_{ik} - \frac{b_{ii} b_{ik}}{\sigma_i^2 + b_{ii}} \right) \frac{d_i}{\sigma_i^2} \right]_{k=1,n} \\ &= \left[ \frac{d_i}{\sigma_i^2 + b_{ii}} b_{ik} \right]_{k=1,n} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Le facteur  $\frac{d_i}{\sigma_i^2 + b_{ii}}$  peut être vu comme un facteur de normalisation ( $i$  est fixé par la position de l'observation unique  $y_i^o$ ),  $\delta\mathbf{x}^a$  apparaît alors comme proportionnel à la  $i^e$  colonne de  $\mathbf{B}$ .

Afin d'illustrer ce propos, nous montrons un résultat obtenu avec une configuration simplifiée de **B**. Nous l'appelons configuration "plate" des variances des erreurs de l'ébauche. Numériquement cela correspond à une variance égale à 1 ( $b_{kk} = 1$ , pour tout  $k = 1, \dots, n$ ). Par ailleurs, les covariances des erreurs de l'ébauche suivent une décroissance gaussienne avec l'éloignement des points de grille concernés. La portée de ces corrélations est fixée à  $r = 10$  niveaux dans les exemples numériques.

Nous avons donc simulé une observation unique au trentième niveau ( $i = 30$ ) avec une donnée observée, telle que le vecteur d'innovation prenne une valeur égale à la moitié de l'écart type des erreurs d'observation :  $d_i = \frac{\sigma_i}{2}$ . La figure (2.6) montre l'incrément d'analyse de cet exemple, pour lequel nous rappelons les valeurs numériques utilisées :  $n = 50$ ,  $i = 30$ ,  $\sigma_i^2 = b_{kk} = 1$  et  $d_i = \frac{1}{2}$ . Le lecteur notera que l'on retrouve sur le graphique, la relation (2.60) établie entre les  $n$  valeurs de l'incrément d'analyse (ligne continue) et celles de la fonction de structure (profil pointillé en cloche) correspondant au paramètre du niveau  $i = 30$  : le ratio est constant et vaut  $\frac{1}{4}$ . Cependant, plus que la valeur des points des courbes (ou profils), ce sont leurs silhouettes qui se révèlent intéressantes ici. La portée de l'incrément d'analyse est la même que celle de la fonction de structure. On a ici une illustration avec une fonction de structure très simple, mais ce résultat peut être étendu à tout type de fonction de structure.

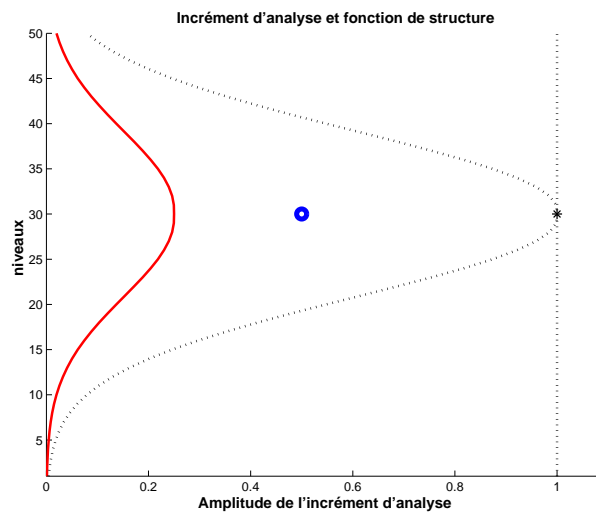


FIG. 2.6: *Incrément d'analyse dans le cas d'une observation unique la position en abscisses du cercle indique la valeur numérique prise par l'unique composante du vecteur d'innovation,  $d_i = 0.5$ . La position en ordonnées de ce cercle indique le niveau de l'observation unique ( $i = 30$ ). La courbe en tracé continu épais montre les valeurs de l'incrément d'analyse en fonction du niveau du modèle lorsque l'observation unique a été assimilée. La courbe en pointillés montre les covariances entre le paramètre observé de l'ébauche (paramètre au niveau 30) avec tous les autres paramètres (niveaux) du modèle. C'est la fonction de structure  $[b_{ik}]_{k=1,n}$  avec  $i = 30$  qui apparaît dans l'équation (2.60). La ligne verticale en pointillés montre les variances  $b_{ii}$  : elles sont uniformes sur la verticale, dans ce cas. Enfin, l'étoile situe la valeur de  $\sigma_i^2$ .*

### Sensibilité à une observation unique

Comme nous l'avons montré analytiquement dans la partie 2.3.2, nous souhaitons faire apparaître que l'adjoint de l'opérateur d'assimilation produit le même effet sur la sensibilité aux conditions initiales que le fait l'opérateur direct sur le vecteur d'innovation. Dans la partie ci-dessus, nous avons illustré numériquement, cet effet dans le cas *direct*. Nous souhaitons montrer à présent, que l'approche adjointe produit les mêmes effets concernant la sensibilité aux observations.

Tout d'abord, nous rappelons la formule qui donne la sensibilité d'un aspect de la prévision  $\mathcal{J}$  au vecteur d'observation :

$$\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{J} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J} \quad (2.61)$$

où  $\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J}$  est un vecteur de dimension  $n$  et donne la sensibilité de  $\mathcal{J}$  aux conditions initiales de la prévision. Notons  $\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J} = [g_k]_{k=1,n}$ .

Dans le cas d'une expérience avec une observation unique, la sensibilité à l'observation est un scalaire. Soit  $\nabla_{y_i}\mathcal{J}$  la composante unique de  $\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{J}$ .  $\nabla_{y_i}\mathcal{J}$  s'écrit selon la formulation suivante :

$$\nabla_{y_i}\mathcal{J} = \sum_{k=1}^n \frac{a_{ki} \cdot g_k}{\sigma_i^2} \quad (2.62)$$

Si on utilise l'équation (2.59) pour remplacer  $a_{ki}$  et la propriété de symétrie de  $\mathbf{B}$  (ie :  $b_{jk} = b_{kj}$ ), l'équation (2.62) devient :

$$\nabla_{y_i}\mathcal{J} = \sum_{k=1}^n \frac{b_{ki} \cdot g_k}{\sigma_i^2 + b_{ii}} \quad (2.63)$$

Enfin, nous avons la possibilité d'isoler le facteur d'échelle  $\frac{1}{\sigma_i^2 + b_{ii}}$  pour écrire que

$$\nabla_{y_i}\mathcal{J} = \frac{1}{\sigma_i^2 + b_{ii}} \sum_{k=1}^n b_{ki} \cdot g_k \quad (2.64)$$

Cette dernière équation (2.64) montre que la sensibilité à une observation unique n'est pas seulement influencée par la sensibilité aux conditions initiales au point  $i$ , mais aussi par la sensibilité de  $\mathcal{J}$  aux  $k$  autres paramètres du modèle (autres points de grille) dans  $\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J}$ . Ce phénomène se produit sous l'influence de la fonction de structure  $[b_{ik}]_{k=1,n}$ .

Imaginons à présent une sensibilité aux conditions initiales,  $\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J}$ , qui présente un extrême significatif à un point de grille unique (sensibilité nulle par ailleurs), ce qui signifie que l'aspect  $\mathcal{J}$  de la prévision qui est étudié est très sensible aux conditions initiales  $\mathbf{x}^a$  du niveau  $k$  uniquement. La sensibilité aux conditions initiales peut alors se formaliser ainsi :

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J} = \left[ 0 \quad \dots \quad 0 \quad g_k \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]^T \quad (2.65)$$

En choisissant un gradient aux conditions initiales qui a un tel profil vertical, on reproduit les conditions de l'observation unique du calcul *direct*, à savoir que le vecteur d'entrée du calcul, présente une valeur unique non nulle. Ce type de calcul permet de mieux comprendre comment la sensibilité dans une région donnée du modèle (ici le point  $k$ ) est transmise aux autres points par le processus d'assimilation.

La sensibilité de  $\mathcal{J}$  à l'unique observation est alors donnée par

$$\nabla_{y_i} \mathcal{J} = \frac{b_{ki} g_k}{\sigma_i^2 + b_{ii}} \quad (2.66)$$

quel que soit l'éloignement relatif des niveaux  $i$  et  $k$ . La sensibilité à l'observation unique sera d'autant plus forte que  $k$  et  $i$  sont proches.

En nous plaçant dans le cas d'une expérience avec une observation unique, la sensibilité à cette observation est un scalaire. Il est alors difficile de mettre en évidence une répartition de l'information en d'autres points que celui observé. L'examen de l'équation (2.66) nous indique très naturellement que pour exprimer une telle information, il suffit de faire varier  $i$  en conservant  $k$  fixé.

Ainsi, en testant les différentes localisations possibles pour l'observation unique; c'est-à-dire en réalisant  $n$  expériences qui correspondent au placement successif de l'observation sur l'un des  $n$  niveaux possibles du modèle, nous pouvons faire apparaître la fonction de structure  $[b_{ik}]_{i=1,n}$ .

Ceci est vérifié tout particulièrement si la variance de l'erreur d'observation ne dépend pas de la localisation de l'observation (ie.  $\sigma_i^2$  est constante pour tout  $i$ , dans l'équation 2.66) et si la variance des erreurs de l'ébauche ( $b_{ii}$ ) reste constante quel que soit le point  $i$  testé.

Afin d'illustrer ce propos, nous avons réalisé  $n = 50$  expériences en testant une localisation sur un niveau modèle différent à chaque fois. La figure suivante rassemble les résultats de ces 50 expériences en matière de sensibilité de  $\mathcal{J}$  à ces observations uniques. De ces 50 scalaires  $\nabla_{y_i} \mathcal{J}$ , nous avons généré un "pseudo-vecteur" de 50 éléments:  $[\nabla_{y_i} \mathcal{J}]_{i=1,n}$ . Toutes ces expériences sont réalisées de façon identique, mis à part le changement de place de l'observation. Nous avons choisi de travailler avec une sensibilité de  $\mathcal{J}$  aux conditions initiales qui est définie pour le trentième niveau, uniquement, ie:  $g_{30} = 1$  dans l'équation (2.65). Les variances d'erreur d'observation sont constantes et égales à 1, pour tous les niveaux testés.

La figure (2.7) montre les résultats obtenus avec la configuration "plate" des variances des erreurs de l'ébauche (variances constantes et égales à 1 quel que soit le niveau vertical). De ce choix dérive le résultat suivant :

$$[\nabla_{y_i} \mathcal{J}]_{i=1,n} = \frac{1}{2} [b_{ki}]_{i=1,n} \quad (2.67)$$

Ainsi la courbe composite (dessinée en escalier sur la figure 2.7) de sensibilité de  $\mathcal{J}$  à l'observation unique, pour les 50 expériences, correspond à la moitié de la fonction de structure  $[b_{ki}]_{i=1,n}$  où  $k = 30$ . Cette fonction est représentée elle aussi sur la figure, pour comparaison.



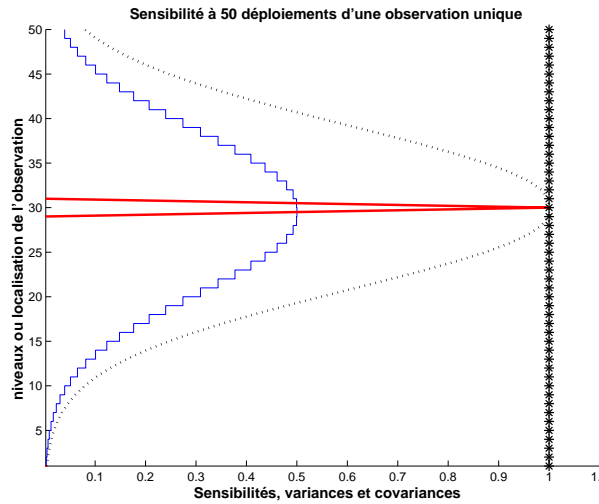


FIG. 2.7: *Sensibilité à une observation unique* : la courbe en “escaliers” montre la valeur de la sensibilité à l’observation unique lorsqu’elle est située au niveau correspondant. La courbe en trait épais et continu donne la sensibilité de  $\mathcal{J}$  aux conditions initiales et qui est identique entre les expériences. La courbe en pointillé donne le profil de la fonction de structure correspondant au paramètre  $k = 30$ . Enfin, les étoiles montrent les valeurs prises par  $\sigma^2$  ainsi que par les termes diagonaux de  $\mathbf{B}$  (constants et égaux à 1) au cours des 50 expériences superposées sur ce graphique.

Nous avons pu, grâce à ces exemples simples, mettre en évidence l’effet de  $\mathbf{K}$  sur le vecteur d’innovation dans le calcul direct de l’assimilation et l’effet de  $\mathbf{K}^T$  sur la sensibilité aux conditions initiales dans l’approche adjointe pour calculer la sensibilité aux observations. Cet effet est identique dans les deux cas et consiste en une répartition de l’information autour de son “point d’entrée” grâce à la portée des fonctions de structure décrites dans  $\mathbf{B}$  (donc dans  $\mathbf{A}$ ).

Il reste cependant la question de l’interpolateur  $\mathbf{H}$  (et  $\mathbf{H}^T$ ). Ces opérateurs ont eux aussi une fonction de répartition spatiale de l’information. Jusqu’à présent réduits à une forme très simple, telle que la substitution, ils n’ont pu intervenir. On souhaite cependant pouvoir estimer l’influence respective des portées et de l’opérateur d’observation et montrer la prédominance du premier processus sur le second.

### 2.3.4 Cas de plusieurs observations avec un schéma d’interpolation

Nous avons choisi d’illustrer ici, la prédominance des portées de  $\mathbf{B}$  sur le schéma d’interpolation contenu dans  $\mathbf{H}$  dans le transport (ou non) de l’information de sensibilité sur plusieurs niveaux du modèle.

L’opérateur  $\mathbf{H}$  peut être plus ou moins complexe, en fonction de la subtilité du schéma d’interpolation spatiale. Ceci implique qu’il y a moins d’intérêt que précédemment à détailler le formalisme mathématique. Nous nous focalisons donc directement sur des résultats numériques.

Nous avons choisi d’utiliser un schéma d’interpolation vertical qui utilise 5 niveaux ( $r = 2$

niveaux de part et d'autre (dessus et dessous) du niveau observé). Un tel schéma est déjà plus riche que celui d'ARPEGE qui ne fait qu'une utilisation des niveaux les plus proches.

Ainsi l'interpolateur linéaire peut s'écrire comme suit :

$$y_k^o = \alpha x_{k-2} + \beta x_{k-1} + \gamma x_k + \beta x_{k+1} + \alpha x_{k+2} \quad (2.68)$$

$\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont constants pour tout  $k$  sur les niveaux allant de 3 à  $n - 3$ , une formulation légèrement différente, tenant compte des effets de toit et de limite inférieure du modèle, est utilisée pour les autres niveaux d'observation ( $k \leq 2$  et  $k \geq (n - 2)$ ).

Il apparaît que la portée de l'opérateur d'observation est bien plus faible que celle des fonctions de structure de  $\mathbf{B}$ . Dans le transport d'information, les portées du second opérateur auront une nette prédominance, mais ce choix des portées n'est pas anodin, car il reflète des rôles différents pour ces deux opérateurs. Ainsi les portées de  $\mathbf{B}$  impliquent des phénomènes météorologiques (une erreur à un niveau donné est nécessairement corrélée avec les erreurs aux niveaux avoisinants) alors que la portée de  $\mathbf{H}$  est uniquement liée aux caractéristiques de l'interpolation.

Nous allons détailler la capacité des covariances des erreurs de l'ébauche à répandre la sensibilité de  $\mathcal{J}$  aux conditions initiales d'une couche de l'atmosphère vers une autre couche atmosphérique, quand le schéma d'interpolation de  $\mathbf{H}$  ne le permet pas. En d'autres termes, nous considérons que la colonne d'atmosphère est observée sur la verticale par des réseaux d'observation différents. De plus, nous supposons que l'opérateur d'observation direct ( $\mathbf{H}$ ) ne transmet aucune information d'une couche vers d'autres couches de l'atmosphère.

Pour le mettre en œuvre dans notre système simplifié, nous allons considérer que la colonne d'atmosphère modélisée est séparée en  $k = 2$  couches superposées. Chaque couche est observée par un système indépendant.

Soit la matrice correspondant à l'opérateur d'observation direct  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Les dimensions de la matrice ( $\mathbf{H}$ ) sont  $p \times n$ . La figure (2.8) montre la situation pour  $n = 4$ ,  $p = 2$  et  $k = 2$  avec une observation par couche d'atmosphère.

Nous considérons donc deux couches superposées au sein de cette colonne d'atmosphère. Chacune de ces couches est observée par un réseau de  $p_k$  observations. Nous avons la relation  $p = p_1 + p_2$ . Nous choisissons le schéma d'interpolation de  $\mathbf{H}$  tel qu'il ne puisse pas transmettre d'information entre ces deux couches superposées. C'est une hypothèse forte, mais nous souhaitons montrer que les covariances et donc que  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}^T$  peuvent le faire malgré cela.

En accord avec nos choix de  $k$  et  $m$ , on peut détailler les opérateurs suivants :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

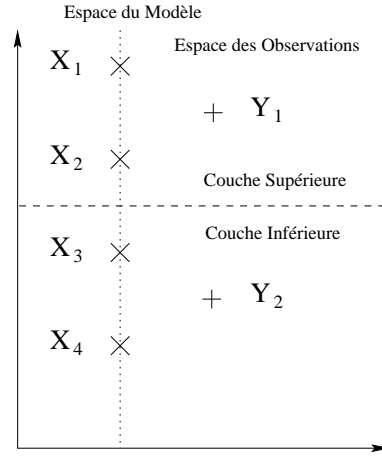


FIG. 2.8: *Discrétisation du modèle et les observations correspondantes pour la configuration de la première expérience avec une atmosphère multicouche.*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Puis en les substituant dans l'équation du BLUE (2.26), nous obtenons que  $\mathbf{A}$  peut s'écrire comme ci-dessous :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{H}^T \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_1 + \mathbf{H}_1\mathbf{B}_{11}\mathbf{H}_1^T)^{-1} & (\mathbf{H}_1\mathbf{B}_{21}\mathbf{H}_2^T)^{-1} \\ (\mathbf{H}_2\mathbf{B}_{12}\mathbf{H}_1^T)^{-1} & (\mathbf{R}_2 + \mathbf{H}_2\mathbf{B}_{22}\mathbf{H}_2^T)^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{B} \quad (2.72)$$

À ce point du développement, deux hypothèses viennent naturellement et peuvent être testées. Ces hypothèses sont basées sur le fait que les erreurs de l'ébauche entre les deux couches sont corrélées; c'est-à-dire que les portées de  $\mathbf{B}$  s'étendent d'une couche à l'autre, au delà de la limite entre ces couches ou si ces couches sont décorréelées et que les portées de  $\mathbf{B}$  restent confinées dans chaque couche. Nous examinerons les deux possibilités. Le cas d'indépendance entre ces erreurs (pas de corrélations) est illustré ci-dessous.

### Pas de corrélations entre les deux couches de la colonne

Cette hypothèse d'indépendance implique que les blocs  $\mathbf{B}_{21}$  et  $\mathbf{B}_{12}$  sont nuls. Dans ce cas l'équation (2.72) devient :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} - \mathbf{B}_{11}\mathbf{H}_1^T(\mathbf{R}_1 + \mathbf{H}_1\mathbf{B}_{11}\mathbf{H}_1^T)^{-1}\mathbf{H}_1\mathbf{B}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{22} - \mathbf{B}_{22}\mathbf{H}_2^T(\mathbf{R}_2 + \mathbf{H}_2\mathbf{B}_{22}\mathbf{H}_2^T)^{-1}\mathbf{H}_2\mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Finalement, la matrice correspondant à l'adjoint de l'opérateur du *gain* est aussi bloc-diagonale :

$$\mathbf{K}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^T & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2^T \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Si on considère une fonction coût  $\mathcal{J}$  qui est sensible aux conditions initiales dans une seule des deux couches (i.e. : la sensibilité aux conditions initiales est non nulle seulement dans une des deux couches), la sensibilité de  $\mathcal{J}$  aux observations sera non nulle seulement sur les observations qui sont présentes dans la couche en question.

Pour illustrer ce propos, soit un champ de sensibilité aux conditions initiales  $\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J}$ , tel que seules les conditions initiales de la couche supérieure de la colonne influencent  $\mathcal{J}$ .

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J} = \begin{bmatrix} g_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

En suivant le même formalisme que dans l'équation (2.52), nous distinguons deux sous-vecteurs au sein de  $\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{J}$ .  $\nabla_{y_I}\mathcal{J}$  est la sensibilité aux observations de la couche 1 ou couche supérieure.  $\nabla_{y_{II}}\mathcal{J}$  est la sensibilité de  $\mathcal{J}$  à la couche 2 (nous utilisons ici un formalisme avec numérotation romaine pour éviter de confondre  $\nabla_{y_{II}}\mathcal{J}$  avec  $\nabla_{y_2}\mathcal{J}$ , la seconde composante du vecteur  $\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{J}$ ).

La sensibilité aux observations prend donc la forme :

$$\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{J} = \mathbf{K}^T \nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J} \quad (2.76a)$$

$$\begin{bmatrix} \nabla_{y_I}\mathcal{J} \\ \nabla_{y_{II}}\mathcal{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^T g_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.76b)$$

Il apparaît que la fonction coût  $\mathcal{J}$  est libre de toute sensibilité aux observations qui appartiennent au réseau de la couche basse ( $\nabla_{y_{II}}\mathcal{J} = 0$ ). On retrouve ce résultat sur la figure (2.9) qui a été produite avec les paramètres  $k = 2$  couches,  $p = 5$  observations ( $p_1 = 2$  et  $p_2 = 3$ ) et  $n = 50$  niveaux dans le modèle. La coupure entre les deux couches s'effectue au niveau  $h = 25$ . On utilise ici une configuration moins restrictive des variances de  $\mathbf{B}$  que dans les résultats montrés précédemment (les variances d'erreur de l'ébauche ne sont plus constantes sur la verticale). La variance au niveau  $k = 25$  est minimale et vaut 1. Plus on s'approche du toit et du plancher du modèle plus cette variance augmente selon une forme quadratique. La variance maximale est atteinte pour les niveaux aux limites inférieure et supérieure du modèle avec une valeur de 1.5 (voir figure 2.9).

Les cinq observations simulées sont entachées d'une erreur dont la variance est fonction du niveau observé. Une fois encore, afin d'être réalistes, nous avons choisi d'assigner une erreur plus forte (1.0) aux observations proches du toit et du plancher du modèle. La variance d'erreur d'observation minimale est de 0.9 pour une observation du niveau intermédiaire 25.

Il apparaît clairement que l'information de sensibilité aux conditions initiales de la couche supérieure n'a pu être propagée aux observations de la couche inférieures par  $\mathbf{K}^T$ , alors que  $\mathcal{J}$  est sensible à toutes les observations de la couche supérieure, même si celles-ci ne sont pas positionnées sur le maximum de sensibilité aux conditions initiales (cf. résultats illustrés précédemment). Il apparaît donc qu'il ne peut y avoir de transmission de la sensibilité au travers de la frontière située à  $h = 25$ .

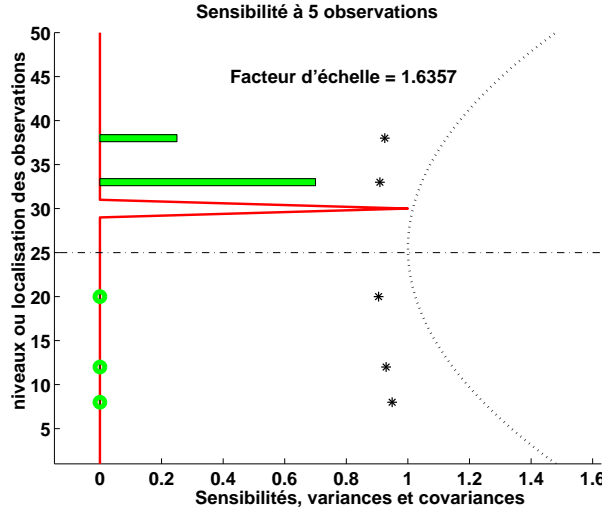


FIG. 2.9: *Sensibilité à 5 observations disséminées dans deux couches (séparées par la ligne horizontale mixte). La ligne continue épaisse figure la sensibilité aux conditions initiales. Le profil en pointillé donne la variance des erreurs de l'ébauche en fonction de la verticale. Les étoiles sont positionnées aux niveaux observés (en ordonnées) et selon la variance des erreurs d'observation en abscisses. La longueur des barres horizontales figure la sensibilité à l'observation positionnée au niveau correspondant (avec un facteur d'échelle \*) Les cercles montrent les niveaux observés avec une sensibilité nulle. \* On a appliqué un facteur d'échelle, le même pour toutes les observations, afin de pouvoir représenter la sensibilité sur le même graphique que les autres composantes du problème.*

### Les erreurs de l'ébauche des deux couches sont corrélées

Dans le cas où les erreurs de l'ébauche des deux couches sont corrélées, la formulation théorique de (2.72) devient peu évidente à manipuler, ce qui représente peu d'intérêt puisque nous cherchons à travailler avec des exemples simples. Nous donnons donc directement un résultat numérique pour l'illustrer.

$\mathbf{B}_{21}$  et  $\mathbf{B}_{12}$  ne sont pas nuls, les variances de  $\mathbf{B}$  ont la même formulation dépendante du niveau  $k$  que dans le cas précédent. Toutes les fonctions de structure ont la même forme gaussienne (à portée  $r = 10$  constante). Ainsi  $\mathbf{A}$  est aussi une matrice pleine et la matrice  $\mathbf{K}^T$  n'est plus bloc-diagonale.

$$\mathbf{K}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^T & \mathbf{K}_{21}^T \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_2^T \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Dans l'expérience numérique, nous utilisons un schéma d'interpolation identique à celui décrit précédemment ainsi que le même gradient (cf. équation 2.75). La sensibilité aux observations garde une forme très générale :

$$\nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^T g_1 \\ \mathbf{K}_{12}^T g_1 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Comme nous l'avons fait précédemment, il est plus intéressant d'illustrer un tel cas avec un exemple numérique (cf. figure (2.10)).

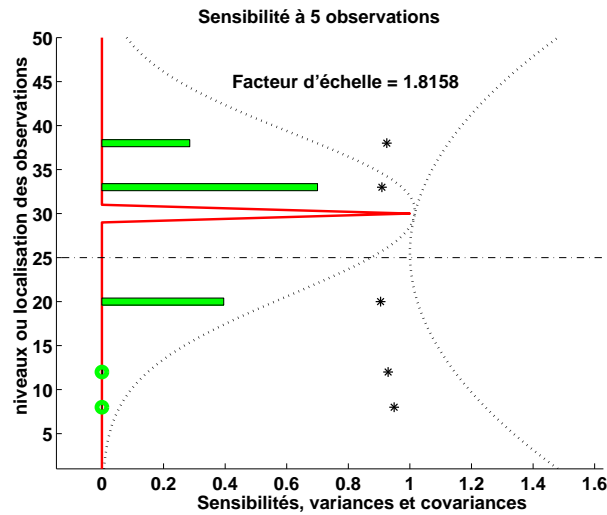


FIG. 2.10: *Sensibilité à 5 observations réparties sur deux couches dont la ligne mixte figure la séparation.*

Les corrélations entre les erreurs de l'ébauche des deux couches de l'atmosphère permettent la transmission de l'information de sensibilité aux conditions initiales, au départ uniquement contenue dans la couche supérieure, vers la sensibilité aux observations de la couche inférieure. Ce transfert est bien le fait des fonctions de structure puisqu'il se fait à une distance du clivage ( $h = 25$ ) supérieure à la portée du schéma d'interpolation de  $\mathbf{H}$  ( $r = 2$ ). L'observation placée le plus haut dans la couche inférieure est à une distance du pic de sensibilité aux conditions initiales et du niveau de clivage qui est supérieure à la portée de  $\mathbf{H}$ .

### Conclusion à propos des exemples simples

En conclusion de ces exemples simples, nous retiendrons que l'effet majeur de l'adjoint de l'opérateur d'assimilation est le même que celui de l'opérateur d'assimilation au sens où il répartit l'information (de type sensibilité) sur une région géographique dépendante des portées contenues dans  $\mathbf{B}$ . En aucun cas l'adjoint se comporte comme un inverse de l'opérateur direct au sens où il aurait concentration de l'information.

Les caractéristiques de la dissémination spatiale des sensibilités sont définies essentiellement par les fonctions de structure contenues dans  $\mathbf{B}$ . Dans le cas de la prévision numérique, comme nous l'avons signalé précédemment, ces fonctions de structure sont liées à la physique (dynamique et processus diabatiques) du modèle et traduisent des propriétés météorologiques de l'atmosphère.

Par la suite, nous chercherons à effectuer des parallèles entre ces quelques illustrations simples et les résultats que nous allons retirer de l'examen de cas réels obtenus avec des données ciblées de FASTEX.

## 2.4 Application dans un cadre variationnel

Pendant le déroulement de la campagne FASTEX, le système d'assimilation opérationnel de Météo-France était un schéma d'**interpolation optimale**. Depuis cette période, les systèmes d'assimilation des données ont fortement évolué et le système opérationnel de Météo-France est désormais basé sur un schéma variationnel, 3D-Var tout d'abord, puis 4D-Var.

Pour les besoins de notre étude en sensibilité qui se devait d'utiliser des outils au plus proche du cadre opérationnel de Météo-France nous avons donc choisi le schéma 3D-Var. Le schéma 4D-Var était alors en développement et son utilisation dans le cadre opérationnel est intervenue au cours de ce travail.

Dans un premier temps, nous allons rappeler le formalisme de l'assimilation variationnelle. Pour bien comprendre la particularité de l'approche, nous partirons du cadre théorique général de l'assimilation 4D-Var. Puis nous regarderons comment le calcul de sensibilité aux observations peut être mis en place dans le cadre de l'assimilation variationnelle 3D-Var.

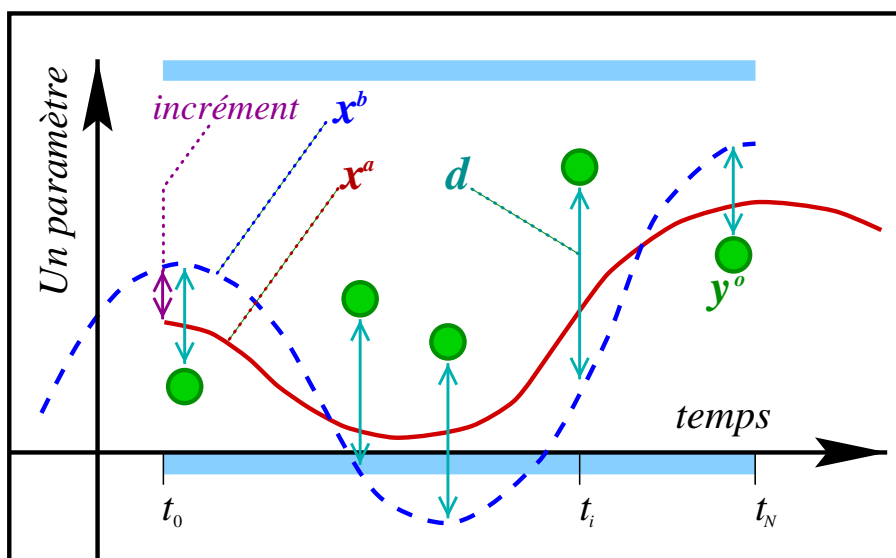


FIG. 2.11: Principe général de l'assimilation de données. Les ronds représentent les observations d'un paramètre atmosphérique. Ils donnent la valeur mesurée (en ordonnées) à l'instant de la mesure (axe des abscisses). La courbe en tirets représente les valeurs de ce paramètre dans la prévision issue de l'ébauche  $\mathbf{x}^b$ . Les doubles flèches verticales symbolisent l'écart des observations à l'ébauche, c'est-à-dire l'innovation, notée  $\mathbf{d}$ . La courbe continue représente ces valeurs dans la prévision issue de l'analyse  $\mathbf{x}^a$ . La zone grisée claire sur l'axe des abscisses représente la fenêtre temporelle  $[t_0 \rightarrow t_N]$  aussi appelée fenêtre d'assimilation.

La figure (2.11) illustre pour un paramètre météorologique donné (la température en un point de l'atmosphère, par exemple), les éléments dont il va être question dans les paragraphes suivants. Les observations sont comparées à l'ébauche à l'instant de mesure correspondant, l'ébauche et l'analyse sont définies sur la fenêtre temporelle d'assimilation.

### 2.4.1 Approche variationnelle

Dans les algorithmes d'assimilation variationnels, l'analyse  $\mathbf{x}^a(t_i)$  n'est pas calculée comme le résultat de l'équation du BLUE (2.26). Néanmoins, sous un certain nombre d'hypothèses d'utilisation optimale des algorithmes variationnels d'assimilation, l'analyse estimée ainsi satisfait la propriété décrite par le BLUE.

#### Origine de l'approche variationnelle.

L'approche variationnelle diffère de l'interpolation optimale ou des approches apparentées au filtre de Kalman-Bucy en ce que l'analyse n'est pas calculée explicitement. En effet, l'approche variationnelle utilise une fonction scalaire objective définie sur les contraintes que doit vérifier l'état d'analyse. L'analyse est l'état qui vérifie au mieux ces contraintes et donc qui minimise cette fonction scalaire.

La définition de cette fonction objective se relie assez aisément à une formalisation en probabilités conditionnelles (formules de Bayes, (Lorenç, 1986)). L'analyse est l'estimation la plus vraisemblable (au sens statistique du terme *maximum de vraisemblance*) de la réalité  $\mathbf{x}^t(t_i)$  compte tenu des informations disponibles (ébauche  $\mathbf{x}^b(t_i)$  et observations  $\mathbf{y}^o(t_i)$ ) ainsi que des incertitudes sur ces dernières ( $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{R}$ ). Ce formalisme issu des probabilités conditionnelles fait notamment un certain nombre d'hypothèses sur la nature gaussienne des fonctions de densité de probabilité des erreurs de l'ébauche et d'observation. Nous retrouverons plus tard de telles hypothèses dans la description des corrélations entre paramètres (cf. partie 3.2.2).

Il peut être montré que l'estimation de ce maximum de vraisemblance correspond en fait au minimum de la fonction objective  $J$  du problème variationnel. La solution du problème variationnel passera donc par la détermination d'un état de l'atmosphère minimisant la fonction en question.

Par ailleurs, une estimation selon le maximum de vraisemblance signifie que la variance des erreurs existantes entre  $\mathbf{x}^a(t_i)$  et la réalité  $\mathbf{x}^t(t_i)$  est minimale.

#### Le problème contraint

La fonction objective définit naturellement la distance entre un état de l'atmosphère décrit dans le modèle et toute information disponible sur la réalité de l'atmosphère (Le Dimet et Talagrand, 1986 ; Talagrand, 1997). Cette information est disséminée à différents instants de l'intervalle de temps discrétisé  $[t_0, t_N]$ . Cette information peut être de deux sortes. D'une part, elle est dispensée par les observations et d'autre part, on dispose d'une première estimation de l'état de l'atmosphère au travers de l'ébauche  $\mathbf{x}^b$ . L'écriture de cette fonction objective  $J$ , distingue ces deux sources possibles en deux termes indépendants,  $J_o$  et  $J_b$ , respectivement :

$$J(\mathbf{x}) = J_o(\mathbf{x}) + J_b(\mathbf{x}) \quad (2.79)$$

$\mathbf{x}$  est appelé variable de contrôle de la fonction  $J$ . On notera  $\mathbf{x}_0$ , sa valeur à l'instant  $t_0$ , plutôt que  $\mathbf{x}(t_0)$  afin d'alléger l'écriture des équations qui vont suivre.



Le terme relatif aux observations ( $J_o$ ), cherche à ajuster l'état de l'atmosphère défini pour tous les instants  $t_i$ , avec les observations qui ont été effectuées aux instants  $t_i$  correspondants,

$$J_o(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq N} (\mathcal{H}_i(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}^o(t_i))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathcal{H}_i(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}^o(t_i)) \quad (2.80)$$

$i$  variant entre 0 et  $N$ . Littéralement, le terme  $J_o$  donne une estimation de la distance quadratique existant entre les observations et la variable de contrôle. Cette distance est pondérée par les statistiques d'erreur d'observation ( $\mathbf{R}^{-1}$ ). Dans ce cadre très général,  $\mathcal{H}_i$  représente le processus d'interpolation temporelle et spatiale entre  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{y}^o(t_i)$ . Cette interpolation est en général non-linéaire. Nous noterons  $H$  la partie correspondant exclusivement à l'interpolation spatiale. La contrainte temporelle s'écrit  $\mathbf{x}(t_{i+1}) = M_{i \rightarrow i+1}(\mathbf{x}(t_i)) + \eta_i$  sur l'intervalle de temps  $[t_i, t_{i+1}]$ , où  $\eta_i$  est l'erreur modèle. Cette dernière n'est pas considérée plus longtemps ici : on se place dans le cas d'un modèle parfait ( $\eta_i = 0$ ). Sur l'intervalle  $[t_0, t_i]$ ,  $\mathcal{H}_i$  prend donc la forme donnée ci-dessous :

$$\mathcal{H}_i(\mathbf{x}_0) = H\mathbf{x}(t_i) \quad (2.81a)$$

$$= HM_{0 \rightarrow i}(\mathbf{x}_0) \quad (2.81b)$$

Cette formulation prise en compte, le terme lié aux observations peut s'écrire comme suit.

$$J_o(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq N} (H(\mathbf{x}(t_i)) - \mathbf{y}^o(t_i))^T \mathbf{R}^{-1} (H(\mathbf{x}(t_i)) - \mathbf{y}^o(t_i)) \quad (2.82)$$

Dans le second terme ( $J_b$ ),  $\mathbf{x}(t_i)$  est comparé aux valeurs de l'ébauche :

$$J_b(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^b) \quad (2.83)$$

Afin de faciliter la minimisation de  $J$ , une approche dite incrémentale est utilisée dans le modèle ARPEGE. Nous l'avons aussi utilisée dans cette étude.

La notion d'incrément utilise des perturbations autour d'un état de base. Ces perturbations sont d'amplitude suffisamment faible pour avoir un comportement linéaire lorsqu'elles sont propagées par le modèle de prévision où interpolée avec les opérateurs d'observation.

La différence entre l'analyse  $\mathbf{x}^a(t_i)$  et l'ébauche  $\mathbf{x}^b(t_i)$  donne l'incrément d'analyse  $\delta \mathbf{x}_i^a$  qui vérifie pour tout instant  $t_i$  de l'intervalle  $[t_0, t_N]$

$$\delta \mathbf{x}_i^a = \delta \mathbf{x}^a(t_i) = \mathbf{x}^a(t_i) - \mathbf{x}^b(t_i) \quad (2.84)$$

La fonction du variationnel peut donc s'écrire sous une forme incrémentale :

$$J(\delta \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}_0^T \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_0 \quad (2.85a)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq N} (\mathbf{d}(t_i) - \mathbf{H}M_{0 \rightarrow i} \delta \mathbf{x}_0)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{d}(t_i) - \mathbf{H}M_{0 \rightarrow i} \delta \mathbf{x}_0) \quad (2.85b)$$

où  $\mathbf{d}(t_i) = \mathbf{y}^o(t_i) - H(\mathbf{x}^b(t_i))$  est appelé vecteur d'innovation pour l'instant  $t_i$  et représente l'écart à  $t_i$  entre les observations et l'ébauche  $\delta \mathbf{x}_0$  représente l'incrément à l'instant initial de

la fenêtre d'assimilation.

$\mathbf{M}_{0 \rightarrow i}$  est la linéarisation de  $M_{0 \rightarrow i}$  autour de la trajectoire correspondant à la prévision non-linéaire entre les instants  $t_0$  et  $t_i$  et issue de  $\mathbf{x}_0^b$ . En outre,  $\mathbf{H}$  est la linéarisation de  $H$  autour de  $\mathbf{x}^b(t_i)$  à l'instant  $t_i$ . La fonction objective  $J$  incrémentale est alors aisément dérivable par rapport à la variable de contrôle. Cette propriété permet d'utiliser un algorithme de minimisation efficace afin de déterminer ce minimum avec un coût faible (cf. partie 3.2.3).

Par cette minimisation, on détermine la trajectoire notée  $\mathbf{x}^a$  sur la figure (2.11) qui est la meilleure estimation de l'état réel de l'atmosphère au sens du BLUE. Cette assertion reste valable jusqu'à l'instant  $t_N$ , où l'on commence une nouvelle fenêtre d'assimilation. Là, la prévision de la trajectoire d'analyse effectuée avec le modèle non-linéaire deviendra l'ébauche qui sera confrontée aux observations mesurées dans la prochaine fenêtre. C'est le mécanisme de cyclage de l'analyse et en pratique dans le 4D-Var de ARPEGE, la fenêtre est de 6 heures.

Le 3D-Var est une *simplification* du 4D-Var au sens où la dimension temporelle dans la fenêtre d'assimilation est réduite à un instant unique : le présent. Il est équivalent de faire l'hypothèse que toutes les observations effectuées durant cette période ainsi que l'ébauche sont en fait contemporaines de l'instant d'analyse. La distance temporelle entre les fenêtres successives d'assimilation conserve la dimension temporelle au travers du cyclage. Au sein d'une fenêtre d'assimilation, l'étape d'interpolation temporelle n'est plus nécessaire et la formulation (2.85) se simplifie en :

$$J(\delta \mathbf{x}_i) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}_i^T \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_i \quad (2.86a)$$

$$+ \frac{1}{2} (\mathbf{d}(t_i) - \mathbf{H} \delta \mathbf{x}_i)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{d}(t_i) - \mathbf{H} \delta \mathbf{x}_i) \quad (2.86b)$$

où l'indice temporel  $i$  met en évidence que tous les éléments de  $J$  sont désormais définis au même instant. L'utilisation d'un système d'indices se révèle alors caduque (on utilisera donc  $\delta \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{x}^a$  dans la suite des notations). C'est dans cette configuration de l'algorithme variationnel qu'ont été menées les expériences de sensibilité aux observations.

### La minimisation de $J$

Le calcul du gradient de la fonction objective  $\nabla J$  (ou  $J'$ ) par rapport à  $\delta \mathbf{x}$ , la variable de contrôle, permet de mettre en relation directe une variation de  $J$  avec une variation de  $\delta \mathbf{x}$ . Il est alors possible d'utiliser un algorithme itératif de minimisation standard pour déterminer l'état initial  $\mathbf{x}^a$  correspondant au minimum de  $J$ . Ce peut être un algorithme de gradient conjugué, par exemple (cf. partie 3.2.3 pour quelques précisions).

Un tel algorithme utilise une estimation du gradient de  $J$  pour déterminer une direction dans l'espace à  $n$  dimensions des incréments  $\delta \mathbf{x}$ , dans laquelle une modification de l'incrément conduira à une diminution maximale de  $J$ . On détermine alors le point correspondant à la plus basse valeur de  $J$ , dans cette direction. On effectue un nouveau calcul de  $\nabla J$  qui permettra

de déterminer un autre point, auquel correspond une valeur de  $J$  encore plus faible, dans la nouvelle direction de *descente*.

Le gradient de  $J$  par rapport à l'incrément s'écrit :

$$\nabla J = \frac{\partial J}{\partial \delta \mathbf{x}_i} = \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \delta \mathbf{x}_i - \mathbf{d}(t_i)) \quad (2.87)$$

Le gradient (ou dérivée première par rapport à  $\delta \mathbf{x}$ ) de  $J$  est nul pour  $\delta \mathbf{x}^a(t_i)$ , au minimum de la fonction objective. La dérivée seconde de  $J$  par rapport à  $\delta \mathbf{x}$  est appelée Hessienne de  $J$ .

### 2.4.2 Variance d'erreur d'analyse et Hessienne de la fonction objective $J$

Sachant que la mise en œuvre de l'outil de sensibilité aux observations dans la système numérique d'assimilation-prévision ARPEGE, s'est faite avec un algorithme 3D-Var, il est primordial de poser le lien théorique entre la formalisation initiale de la sensibilité aux observations (cf. équation 2.39) et le cadre variationnel d'implémentation de l'algorithme.

Dans sa formulation incrémentale, la Hessienne de la fonction objective du variationnel  $J$  est donnée par :

$$J'' = \nabla \nabla J = \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \quad (2.88)$$

Au minimum de  $J$  qui est une fonction quadratique, l'incrément d'analyse  $\delta \mathbf{x}^a(t_i)$ , ( $\delta \mathbf{x}^a = \mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b$ ) vérifie la relation  $\nabla J(\delta \mathbf{x}^a) = \mathbf{0}$ .

Si nous développons l'expression du gradient de  $J$  par rapport à l'incrément, nous obtenons :

$$\mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}^a + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \delta \mathbf{x}^a - \mathbf{y}^o + H(\mathbf{x}^b)) = \mathbf{0} \quad (2.89)$$

Si la représentation de la réalité  $\mathbf{x}^t$  par le modèle de prévision est introduite dans la définition de l'incrément d'analyse selon  $\delta \mathbf{x}^a = (\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t) - (\mathbf{x}^b - \mathbf{x}^t)$ , l'équation (2.89) se développe comme ci-dessous :

$$(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}) (\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t) = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}^b - \mathbf{x}^t) + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (H(\mathbf{x}^t) - \mathbf{y}^o) \quad (2.90)$$

Par ailleurs, rappelons qu'il est supposé que

- $\mathbf{x}^a$  est non biaisée (c'est-à-dire que  $E(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t) = \mathbf{0}$ ),
- les observations sont aussi non biaisées ( $E(H(\mathbf{x}^t) - \mathbf{y}^o) = \mathbf{0}$ ),
- les erreurs de l'ébauche et d'observation sont statistiquement non corrélées ( $E(H(\mathbf{x}^t) - \mathbf{y}^o)(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t)^T = \mathbf{0}$ ).

Nous rappelons aussi que les matrices de variance-covariances des erreurs de l'ébauche ( $\zeta^b = \mathbf{x}^b - \mathbf{x}^t$ ) et des erreurs d'observation ( $\varepsilon = \mathbf{y}^o - H\mathbf{x}^t$ ) sont notées  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{R}$ , respectivement. L'espérance statistique de la multiplication membre à membre de l'équation (2.90) par sa transposée donne le résultat suivant :

$$(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}) \mathbf{A} (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^T = (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^T \quad (2.91)$$

D'où

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} = (\nabla \nabla J)^{-1} \quad (2.92)$$

Ainsi, dans une formulation totalement idéalisée, où les matrices de variance-covariances sont parfaitement formulées ( $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{R}$  sont spécifiés de façon exacte), il apparaît que l'inverse de la Hessienne de la fonction objective représente la matrice de variance-covariances des erreurs d'analyse et peut être utilisée dans la formulation suivante de l'opérateur adjoint de l'assimilation :

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{A} \quad (2.93)$$

L'estimation de  $\mathbf{A}$  au travers de la Hessienne permet d'illustrer les caractéristiques de l'algorithme d'assimilation.

Cependant, cette information sur les variances des erreurs d'analyse n'est pas estimée lors de la minimisation dans le contexte variationnel; l'analyse étant simplement déterminée comme vecteur d'état au minimum de la fonction objective. L'approche en sensibilité aux observations basée sur un 3D-Var va pourtant demander cette information. Une démarche particulière au cours de la minimisation (partie 3.2.3) sera alors nécessaire. Ces considérations feront l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre 3

# Algorithmique et Validation

Dans cette partie, on commencera par décrire l'environnement opérationnel du 3D-Var de ARPEGE dans lequel l'outil de la sensibilité aux observations a été développé et on se focalisera sur l'approche adjointe qui y a été mise en place. On détaillera ensuite le choix effectué pour estimer l'inverse de la Hessienne.

Dans un second temps, on présentera les tests que nous avons effectués pour valider l'algorithme de la sensibilité aux observations. Ces tests se feront à l'aide d'expériences théoriques (expériences à une observation, modification des erreurs d'observation, modification des valeurs observées, etc.).

Dans un dernier temps, nous présenterons des résultats de tests menés dans des situations réelles et évaluerons le crédit à accorder à certaines hypothèses simplificatrices que nous auront été amenés à poser.

### 3.1 Le modèle ARPEGE

Cette brève introduction au modèle ARPEGE n'a aucune prétention à l'exhaustivité. On renvoie le lecteur à la documentation qui présente ce modèle (Courtier *et al.*, 1991). Il s'agit de donner très simplement quelques caractéristiques qui auront une incidence sur les processus d'assimilation qu'utilise ce modèle.

Il est plus réaliste de parler de modèles *au pluriel*, puisque modèle de prévision numérique, modèle linéaire tangent et modèle adjoint font partie intégrante d'un même code informatique. Ce sont des modèles globaux et spectraux. La particularité du modèle de prévision ARPEGE est sa géométrie puisque la grille correspondant à la discrétisation spatiale présente un facteur d'étirement qui se traduit par une troncature variable en fonction de la région du globe considérée. Le pôle d'étirement est le point où la troncature est la plus fine; c'est à son antipode qu'elle est la plus lâche. Dans la version opérationnelle d'ARPEGE, à la date du développement de la sensibilité aux observations (1998-99), le pôle d'étirement est placé sur la France avec une troncature de 149 nombres d'ondes, le facteur d'étirement est de 3,5. La géométrie est donc notée T149C3.5. La discrétisation verticale de la version utilisée ici comporte 31 niveaux verticaux en coordonnées hybrides (qui monte jusqu'à environ 5 hPa

pour une atmosphère standard). Les paramètres de ce modèle sont la divergence, le tourbillon, la température, l'humidité et la pression de surface.

Il existe par ailleurs une description de la surface selon le schéma ISBA (Noilhan et Planton, 1989), ainsi qu'un certain nombre de paramétrisations physiques. Bon nombre de ces paramétrisations ne sont pas prises en compte dans les approches linéaires et adjointes.

## 3.2 Le 3D-Var de ARPEGE

Comme nous l'avons précisé plus tôt dans ce mémoire, le choix de mettre en œuvre la sensibilité aux observations dans le cadre d'un algorithme d'assimilation opérationnel (en Janvier 1998), nous a orienté vers le 3D-Var plutôt que vers l'Interpolation Optimale (IO) qui était utilisée durant FASTEX. Le schéma 3D-Var a été le schéma d'assimilation opérationnel à Météo-France, avant le passage au 4D-Var (Thépaut et Courtier, 1991) en Juin 2000.

À la fin du chapitre 2 précédent, nous avons présenté la philosophie de l'assimilation variationnelle. Néanmoins nous n'avons pas replacé ce processus essentiel dans le cadre plus pragmatique de la prévision opérationnelle. Le but de cette partie n'est cependant pas de faire une description exhaustive de la chaîne d'opérations nécessaires à la prévision (prise de mesure, transmission, découpages temporels ou *cut-off*, flux de données, aspects logiciels). Nous nous placerons dans une optique qui permet de comprendre comment s'insère le concept de sensibilité aux observations dans le cadre de l'assimilation opérationnelle.

### 3.2.1 Les étapes de l'algorithme 3D-Var

La figure (3.1) donne les étapes du 3D-Var dans ARPEGE, comme nous les avons mises en œuvre dans les expériences de sensibilité aux observations. Dans le bas du schéma sont données les troncatures et facteurs d'étirement utilisés dans les différentes phases. La troncature T95 qui est la plus élevée ici est inférieure à la troncature opérationnelle qui était alors de T149. La troncature de T95 se révèle cependant suffisante pour les phénomènes de cyclogenèses que nous souhaitons étudier, de plus cette résolution plus faible permet un gain de temps de calcul. Le facteur d'étirement est de 3.5 (facteur opérationnel). On remarquera que la minimisation du 3D-Var (le cœur de l'assimilation variationnelle) s'effectue à une résolution plus réduite (T63) pour des raisons de coût de calcul et parce que cette résolution apparaît suffisante pour les expériences que nous avons menées. Dans ce calcul, il n'y a pas d'étirement pour des raisons techniques (non détaillées ici) comme dans la minimisation opérationnelle qui fonctionne aussi sans étirement.

Sur la figure (3.1), les flèches montrent le flux des données. Tout d'abord, les observations (toutes catégories confondues) récoltées sur la fenêtre temporelle d'assimilation subissent un

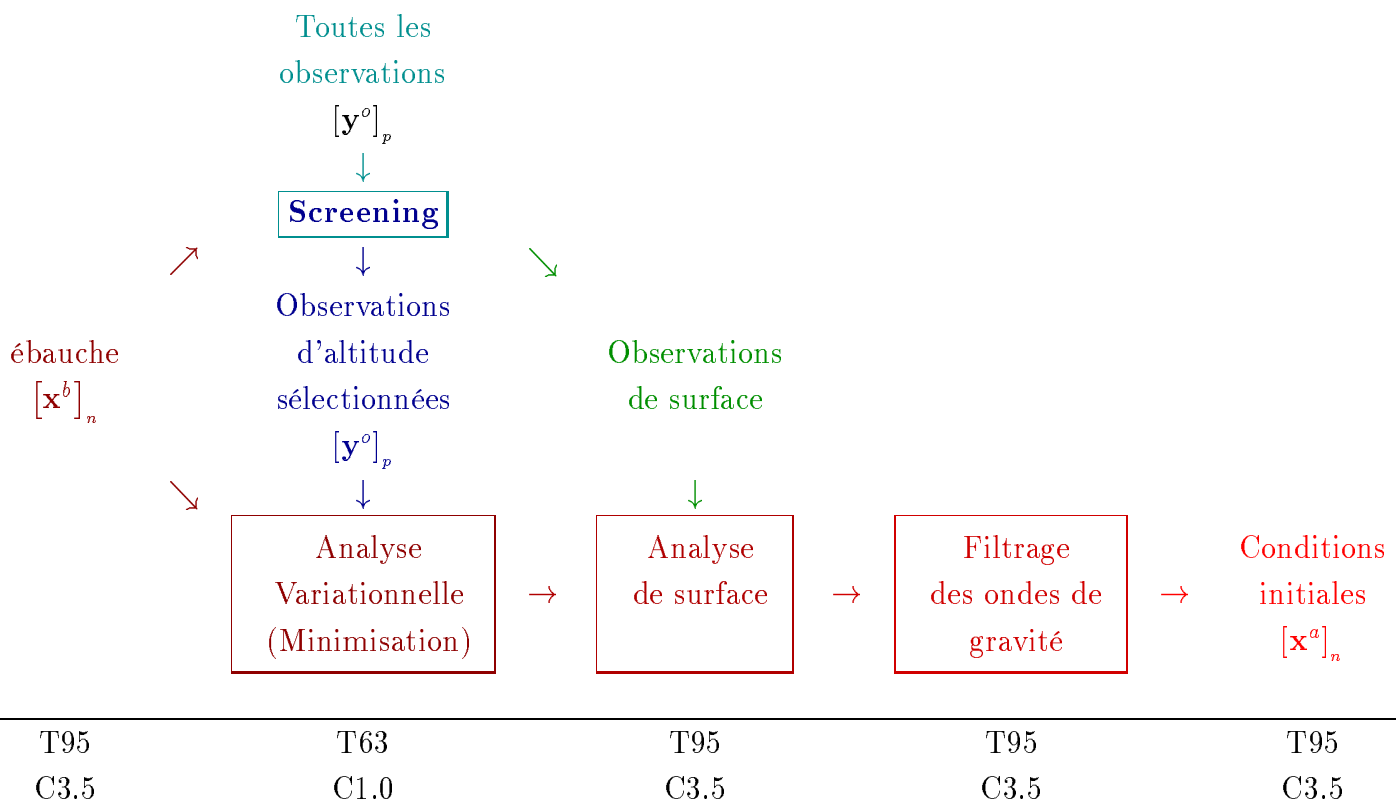


FIG. 3.1: Étapes du 3D-Var dans ARPEGE et les troncatures correspondantes telles que mises en œuvre dans les expériences de sensibilité aux observations avec les données ciblées de FASTEX. Les boîtes figurent les opérateurs et  $[\mathbf{z}]_k$  désigne un vecteur  $\mathbf{z}$  de dimension  $k$ .

tri, ainsi qu'un premier contrôle. Ce contrôle, correspond en premier lieu à la vérification que les données mesurées sont accompagnées de toutes leurs caractéristiques (nature, moyen de mesure, localisation précise de la mesure, première estimation de sa qualité) qui permettront leur assimilation. En effet, c'est à ce niveau que sont générés des opérateurs tels que l'opérateur non-linéaire d'observation  $H$  ou encore le squelette de l'opérateur de variance-covariances des erreurs d'observation ( $\mathbf{R}$ ).

Il y est aussi effectué un tri sur les valeurs mesurées. En effet, pour chaque type d'observation, des bornes de tolérance de ces valeurs sont définies à partir des valeurs équivalentes dans l'ébauche ( $H(\mathbf{x}^b(t_i))$ ) afin d'écartier les observations susceptibles d'être erronées. Toute valeur observée en dehors de ces bornes est rejetée. C'est l'étape d'écrémage ou *Screening* en anglais. Cette étape utilise donc les valeurs de l'ébauche, ce qui explique la double entrée de  $[\mathbf{x}^b]$  sur la gauche de la figure (3.1).

Les observations d'altitude sélectionnées seront utilisées dans l'étape d'assimilation variationnelle. C'est par un processus itératif que l'on va minimiser la fonction objective  $J$  afin d'avoir une première estimation de l'analyse.

L'étape suivante appelée "Analyse de Surface" ne fait pas partie du processus variationnel puisque c'est un schéma d'interpolation optimale (Giard et Bazile, 2000). Cette étape permet d'assimiler toutes les observations concernant la surface et le sol. Les paramètres du modèle qui sont assimilés durant cette phase ne correspondent pas à ceux utilisés dans l'étape variationnelle. Les observations ciblées telles que mises en place durant FASTEX ne sont pas utilisées dans ce schéma puisque il s'agit d'observations d'altitude.

Enfin, la troisième étape constitue un filtrage des champs du modèle (Lynch *et al.*, 1997). En effet, les étapes précédentes peuvent générer des perturbations de petite échelle non réalistes. Le but de cette étape de filtrage est donc de supprimer cette information. C'est à l'issue de ce dernier processus que l'on appelle aussi **initialisation** que l'on obtient les conditions initiales de la prévision.

Dans un cadre rigoureux tel que nous l'avons défini précédemment, c'est sur ces conditions initiales que doit être effectuée la prévision qui permettra de calculer la fonction coût  $\mathcal{J}$  à l'instant final (cf. équation 2.14). De même, c'est l'adjoint de ces quatre processus dont il faudrait disposer pour calculer la sensibilité aux observations qui entrent dans le processus d'assimilation. Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse concerne principalement la seconde étape, qui consiste à estimer l'adjoint de l'opérateur de la boîte "Assimilation Variationnelle" de la figure (3.1). Ceci concorde par ailleurs avec le fait que le ciblage utilise des observations et les champs d'altitude du modèle ARPEGE.



### 3.2.2 Formulation des opérateurs et des statistiques

Nous avons vu que certains des opérateurs ( $\mathbf{B}$ , en particulier) qui entrent dans la formulation de la fonction objective  $J$  du 3D-Var, sont des approximations du fait de la très grande difficulté d'avoir une estimation précise de ceux-ci. Ces approximations impliquent que l'assimilation n'est pas optimale au sens où l'analyse  $\mathbf{x}^a(t_i)$  que l'on calcule par le processus d'assimilation n'est pas la meilleure estimation de la réalité car les statistiques d'erreur utilisées ne sont pas l'expression des réelles variances et covariances. Mais nous souhaitons conserver ces particularités dans l'opérateur adjoint afin que notre estimation de la sensibilité aux observations soit représentative des processus d'assimilation (processus directs).

#### Description de $\mathbf{B}$

Dans le schéma opérationnel, les statistiques décrivant les erreurs de l'ébauche ont une formulation statistique indépendante du temps et de la situation météorologique. En réalité, il est évident que ces variances et covariances changent d'un jour à l'autre. Tout prévisionniste sait combien la confiance qu'il a dans un modèle de prévision numérique varie selon les saisons et les situations météorologiques.

Cependant la formulation de  $\mathbf{B}$  doit être assez simple puisque dans l'algorithme variationnel, l'inverse de  $\mathbf{B}$  apparaît dans le calcul de  $J$  et de sa dérivée première.

La description d'une telle matrice ou d'un tel opérateur se heurte à de nombreux problèmes. Tout d'abord, l'ignorance des erreurs réelles ( $\mathbf{x}^t$  n'est jamais connu) rend d'autant plus difficile la constitution de statistiques à propos de ces erreurs. D'autre part, les dimensions ( $n \times n$ ) de la matrice carrée  $\mathbf{B}$  ( $n$  étant la dimension d'un vecteur d'état qui atteint  $10^6$ ) rend le stockage quotidien des coefficients de cette matrice tout simplement impossible dans les systèmes informatiques actuels.

Le 3D-Var utilise donc un opérateur, à la place de l'inverse de la matrice elle-même, qui spécifie des statistiques d'erreur indépendantes du temps.  $\mathbf{B}$  est estimé, sur la base d'informations partielles. Le lecteur se référera aux travaux de F. Bouttier (Bouttier *et al.*, 1997) pour de plus amples détails. Il est cependant utile de décrire dans ses grandes lignes les caractéristiques de cet opérateur.

La formulation est basée sur un schéma de portées (pour décrire les covariances entre variables du même type) et de balances (pour lier les statistiques des types de variables entre eux). Les variances (éléments qui correspondent à la diagonale de la matrice) sont ainsi déduites des seules variances de tourbillon qui sont données en entrée à l'algorithme. Cette formulation dépend de la géométrie du modèle. En effet, il est utile de préciser que les variances utilisées dans l'étape du *Screening* de la figure (3.1) ne sont pas les mêmes que celles utilisées dans la minimisation du fait que l'on se trouve dans une configuration à haute résolution étirée dans un cas et à basse résolution sans étirement dans le second.

Cette formulation des statistiques d'erreur de l'ébauche est dite **multivariée** en ce qui

concerne les paramètres du champ de masse (pression et température) et du champ de vent (tourbillon et divergence). Les paramètres décrivant l'humidité ont une formulation à part dans le système 3D-Var utilisé pour ces travaux : dans l'ébauche, il n'existe pas de corrélation entre les erreurs concernant l'humidité et les erreurs sur les autres paramètres précités. Pour ce cas de l'humidité, on parlera de formulation **monovariée**.

L'opérateur  $\mathbf{B}^{-1}$  est utilisé pour définir un changement de variable nécessaire à la convergence de l'algorithme de minimisation.  $\mathbf{B}^{-1}$  étant symétrique, on peut écrire sa décomposition sous la forme :

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-\frac{T}{2}} \mathbf{B}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

On note  $\mathbf{B}^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{L}$ . Les matrices correspondantes à ce changement de variable sont inversibles et il est donc possible d'en déduire une expression de  $\mathbf{B}$  comme suit :

$$\mathbf{B} = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}^{-T} \quad (3.2)$$

Le lecteur pourra se référer aux travaux de Bouttier (Bouttier *et al.*, 1997) afin de trouver des détails supplémentaires sur les raisons de ce changement de variable.

## Description de $\mathbf{R}$

Tout comme dans le cas de  $\mathbf{B}$ , il est très difficile de déterminer les statistiques des erreurs d'observation de façon précise. Cependant, si les erreurs réelles sont inconnues, l'expérimentation et la mise au point des systèmes d'observation permettent d'estimer les statistiques des erreurs de mesure. La dimension  $p$  du vecteur d'observation est plus faible que celle du vecteur modèle ( $p \simeq 10^4$  à l'heure actuelle, mais avec la multiplication des systèmes de télé-détection de l'atmosphère, le nombre d'observations est en constante augmentation).

L'allure de la matrice lui correspondant est moins complexe que celle de  $\mathbf{B}$ . En effet, de très nombreuses hypothèses de non corrélation des erreurs d'observation sont effectuées. Certaines sont assez directes et naturelles. Par exemple, le fait de considérer que les erreurs commises lors de mesures effectuées avec des dispositifs différents en des lieux différents soient statistiquement indépendantes est une hypothèse aisément justifiable. Néanmoins, d'autres hypothèses de ce type semblent moins évidentes. Par exemple, pour les radiosondages, bien qu'effectuées avec le même capteur, toutes les erreurs d'observation de température commises par une même sonde lors de son ascension sont considérées comme statistiquement indépendantes. C'est aussi le cas des dropsondes ciblées puisque celles-ci sont assimilées comme des données de radiosondage. Par simplification, la matrice  $\mathbf{R}$  est prise diagonale. Ces variances sont fonction des paramètres observés, du dispositif de mesure, ainsi que des conditions de la mesure (altitude de la mesure, par exemple pour le radiosondage).

## Les opérateurs d'observation, $H$ et $\mathbf{H}$

Tout comme les opérateurs décrits précédemment, et d'autant plus que  $H$  peut être non-linéaire, il ne peut y avoir de stockage de l'information sous forme de matrice.

L'opérateur d'observation non-linéaire est mis en place dans l'étape de *screening*, puisque c'est à ce moment qu'est effectuée la comparaison de l'ébauche aux observations (calcul de l'innovation ( $\mathbf{d}(t_i)$ ) dans l'équation 2.86). Dans la formulation incrémentale du 3D-Var, ce terme ne varie pas au cours de la minimisation et il n'est pas recalculé pendant celle-ci. Par souci de précision, les composantes de ce vecteur d'innovation sont estimées à haute résolution.

La linéarisation de cet opérateur (Jacobien) autour de l'état de l'ébauche (qui supporte une écriture matricielle), noté  $\mathbf{H}$ , est utilisée dans la minimisation pour interpoler l'incrément aux points d'observation. Cette estimation est effectuée plusieurs fois, à chaque nouvelle itération de l'algorithme (cf. partie suivante 3.2.3).

### 3.2.3 La minimisation

La minimisation de la fonction objective est le cœur du processus de l'assimilation variationnelle. Divers algorithmes standards de minimisation existent et permettent une convergence plus ou moins rapide vers le minimum de la fonction, selon leurs caractéristiques. Par exemple, certains algorithmes ne fonctionnent de façon efficace que si la fonction est strictement quadratique.

Dans le 3D-Var opérationnel à Météo-France en Janvier 1998, la méthode utilisée était basée sur un algorithme dit de Quasi-Newton (Gilbert et Lemaréchal, 1989). Le calcul de la sensibilité aux observations, et les choix techniques qui y sont liés nous ont amenés à changer d'algorithme de minimisation. En effet, comme nous l'avons souligné à la fin de la partie 2.4.2, l'algorithme utilisé dans la version opérationnelle ne calcule pas  $\mathbf{A}$ , ou l'inverse de la Hessienne (cf. équation 2.92), qui est pourtant nécessaire au calcul de l'adjoint de l'opérateur d'assimilation ( $\mathbf{K}^T$ , cf. équation 2.93).

Nous nous sommes tournés vers une approche de type gradient conjugué (Lemaréchal, 1989), qui présente l'intérêt de nous permettre d'avoir une telle estimation dans ARPEGE (cf. partie 3.3.2). Ce calcul de  $\mathbf{A}$  ne fait pas partie des spécifications originales de ce minimiseur : c'est un raffinement de celui-ci.

Le minimiseur basé sur le gradient conjugué est décrit en détails dans la documentation de l'INRIA (Institut National de la Recherche en Informatique et Automatique) par Lemaréchal. Le lecteur curieux pourra se référer à cette littérature pour plus d'informations.

Dans l'algorithme du gradient conjugué, l'opposé de la dérivée première de la fonction objective  $J$  par rapport à  $\mathbf{x}$  ( $\nabla_{\mathbf{x}}J$ ) est utilisé comme direction de descente. Un nouvel état  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \alpha \nabla_{\mathbf{x}}J$  est calculé en choisissant le coefficient  $\alpha$  qui minimise  $J(\mathbf{x}')$ .  $J$  et  $\nabla_{\mathbf{x}'}J$  sont calculés en ce nouveau point  $\mathbf{x}'$ .  $\nabla_{\mathbf{x}'}J$  est orthogonalisé par rapport à la direction de descente précédente et son opposé sert de direction pour déterminer  $\alpha$  dans cette itération; et ainsi de suite.

Le minimum théorique de la fonction objective est atteint lorsque le gradient ( $\nabla J$ ) est nul

pour toute direction. Pratiquement, ce minimum est considéré comme atteint lorsque le ratio entre le gradient calculé à l'itération  $k$  ( $\nabla_{\mathbf{x}_k} J$ ) et le gradient initial ( $\nabla_{\mathbf{x}_0} J$ ) est suffisamment petit (plusieurs ordres de grandeur).

Nous avons testé la convergence de l'algorithme du gradient conjugué et avons trouvé une convergence rapide, vers un point qui satisfait amplement aux critères classiques de convergence (ceux utilisés pour l'opérationnel, notamment). Le minimum alors obtenu est pratiquement identique pour les deux algorithmes de minimisation (celui du gradient conjugué et celui de Quasi-Newton).

### 3.3 Algorithmique de la sensibilité aux observations

#### 3.3.1 Les étapes du calcul adjoint

La figure (3.2) donne les étapes du calcul adjoint de la chaîne d'estimation de la sensibilité aux observations. Un parallèle peut être fait entre ce schéma et la représentation du 3D-Var (figure 3.1). Cependant le premier schéma n'est pas *l'adjoint* du second. En fait, le croquis ci-dessous comporte la phase de prévision qui est absente dans l'autre. C'est la boîte intitulée  $\mathbf{K}^T$  qui figure l'adjoint de l'opérateur d'assimilation. Cet opérateur adjoint d'assimilation renvoie uniquement à la partie variationnelle de la figure (3.1).

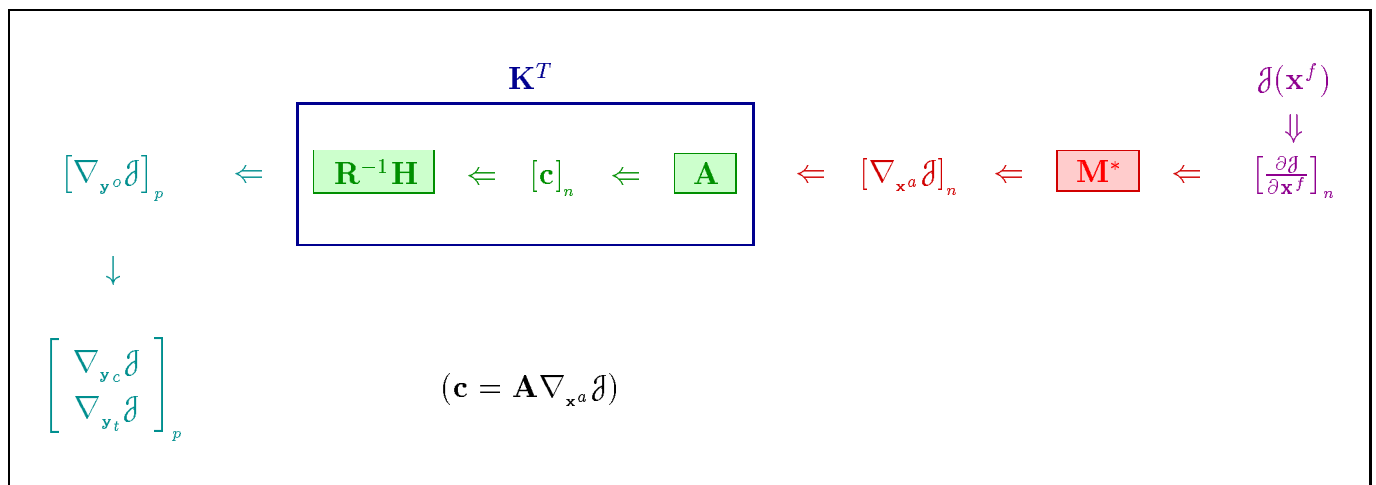


FIG. 3.2: Étapes des calculs adjoints pour estimer la sensibilité aux observations ciblées. Les boîtes formalisent les opérateurs (ou matrices),  $[\mathbf{z}]_k$  désigne un vecteur  $\mathbf{z}$  de dimension  $k$ . La sensibilité aux observations ciblées est notée  $\nabla_{\mathbf{y}_t} \mathcal{J}$  et est une sous-partie du vecteur de sensibilité à toutes les observations utilisées ( $\nabla_{\mathbf{y}^o} \mathcal{J}$ ).

La partie correspondant à l'adjoint de l'opérateur d'assimilation a été séparée en deux étapes successives. La première étape (dans le sens des flèches) consiste à appliquer l'opérateur reproduisant  $\mathbf{A}$  (ou l'inverse de la Hessienne de  $J$ ) à la sensibilité aux conditions initiales  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ . La seconde étape consiste en une interpolation vers l'espace des observations suivie

d'une pondération par les statistiques des erreurs d'observation.

La première de ces deux étapes (estimation de l'inverse de la Hessienne de  $J$ ) est cruciale et nécessite une modification du code du modèle d'assimilation. En effet, nous avons vu que la minimisation de  $J$  pour la détermination de l'analyse nécessite uniquement une succession de calculs de  $J$  et de  $\nabla J$  à chaque itération de l'algorithme. Dans sa version opérationnelle, l'algorithme ne calcule pas explicitement la Hessienne  $\nabla\nabla J$ , pas plus que son inverse.

La précision de l'algorithme de sensibilité aux observations se trouve donc liée à la précision de l'estimation de  $\mathbf{A}$  et c'est sur ce calcul que va se porter notre attention au cours des phases de validation de l'algorithme.

### Le calcul de la sensibilité aux conditions initiales

Le calcul de la sensibilité aux conditions initiales est effectué classiquement. Nous ne donnerons pas de détails concernant cette étape, puisque la bibliographie en la matière est assez fournie et que les éléments théoriques ont déjà été présentés dans la partie (2.1.2).

On notera cependant que des études ont montré que les structures instables sont assez peu sensibles à de petites variations de la trajectoire autour de laquelle la linéarisation est effectuée (Aubert, 1999). On a ainsi la possibilité de choisir 3 états de départ pour le calcul de sensibilité aux conditions initiales : celui directement issu de l'analyse variationnelle (noté *var* et préconisé pour la cohérence entre calcul direct et adjoint de la sensibilité aux observations), celui qui correspond à l'aboutissement de l'analyse de surface (noté *srf*) ou encore celui qui est appelé l'analyse initialisée (noté *dfi*, *digital filter initialization* qui correspond par construction à la meilleur estimation de la réalité). L'impact que peut avoir ce choix sur le calcul de la sensibilité aux observations fait l'objet d'un paragraphe à la fin de ce chapitre.

### 3.3.2 L'estimation de l'inverse de la Hessienne de $J$

L'équation (2.92) montre l'égalité entre l'inverse de la Hessienne de la fonction objective ( $\nabla\nabla J^{-1}$ ) et  $\mathbf{A}$ , la matrice de variance-covariances des erreurs d'analyse. Cette égalité est vérifiée tant que les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{R}$  sont correctement formulées en regard des variances et covariances des erreurs réelles dans l'ébauche et les observations. Le système d'assimilation utilisant une description simplifiée et parfois rustique de ces variances et covariances, l'inverse de la Hessienne ne traduit pas la réelle matrice de variance-covariances des erreurs d'analyse. Dans ce sens, l'utilisation de la notation  $\mathbf{A}$  pour représenter  $\nabla\nabla J^{-1}$  peut être considérée comme un abus. Nous allons cependant conserver cette habitude tout au long de ce mémoire, sauf si une distinction explicite est momentanément introduite.

La figure (3.2) se base sur le formalisme de l'équation (2.48) mais en y lisant  $\nabla\nabla J^{-1}$  à la place de  $\mathbf{A}$ . L'inverse de la Hessienne est bien ce que l'on souhaite utiliser dans notre approche en sensibilité aux observations afin de prendre en compte les particularités du système d'assimilation utilisant les observations ciblées. Ainsi, si le schéma d'assimilation présente des

*faiblesses* (il n'est pas totalement optimal) dans sa formulation, il est souhaitable que celles-ci apparaissent aussi dans l'adjoint de telle sorte que l'approche en sensibilité (partie adjointe) soit cohérente avec le processus direct d'assimilation des données.

À présent, nous allons décrire par quelle méthode il est possible de parvenir à estimer  $\mathbf{A}$  dans cette étape clef du calcul de la sensibilité aux observations. Pour cela, il nous faudra faire une nouvelle incursion vers la théorie avant d'explicitier les choix algorithmiques qui y sont liés.

Nous avons vu que  $\mathbf{A}$  prend la forme d'une matrice symétrique définie positive de dimension  $n \times n$ , où  $n$  est la longueur du vecteur d'état de l'atmosphère, c'est-à-dire le nombre de paramètres présents dans le modèle. Nous avons vu que dans les modèles actuels de prévision numérique, la dimension  $n$  du vecteur d'état dépasse  $10^6$  paramètres. Le stockage de toute l'information relative à  $\mathbf{A}$  ( $n \times n$ ) est pratiquement impossible. Fort heureusement, la formulation de la sensibilité aux observations n'impose pas la connaissance de la matrice elle-même, il suffit d'avoir un opérateur que l'on puisse appliquer au vecteur de sensibilité aux conditions initiales,  $\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$ , afin de calculer  $\mathbf{A} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$ .

### Philosophie de l'approche choisie

Bien que le schéma 3D-Var ne calcule pas explicitement  $\mathbf{A}$  ou  $\nabla \nabla J^{-1}$ , il existe diverses méthodes pour en obtenir une estimation plus ou moins précise et coûteuse (Fisher et Courtier, 1995). Parmi ces techniques, l'une utilise un algorithme de Lanczos afin d'estimer une décomposition en facteurs propres de la Hessienne de  $J$ .

Nous présenterons ici la philosophie de l'approche que nous avons mise en œuvre pour le calcul de la première étape de la sensibilité aux observations à savoir l'estimation du vecteur

$$\mathbf{c} = \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J} \quad (3.3)$$

D'après la formulation de **Shermann-Morrison-Woodbury** (cf. Annexe A.1),  $\mathbf{A}$  peut s'écrire :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B} \quad (3.4)$$

dans le membre de droite, le second terme représente la modification de  $\mathbf{B}$  liée au déploiement des observations qui permet d'obtenir  $\mathbf{A}$ . On appellera cette matrice : matrice de *mise à jour*. On notera que cette modification entraîne la réduction des variances des erreurs de l'ébauche quelle que soit la qualité des observations assimilées. Les statistiques des erreurs d'analyse seront surtout modifiées dans les régions où de l'information a pu être apportée par les observations, tout particulièrement là où sont déployées les observations ciblées. Cette approche est ainsi en accord avec la philosophie du ciblage des observations. Cette méthode d'estimation de  $\mathbf{A}$  par *mise à jour* de  $\mathbf{B}$  apparaît intéressante dans le cadre de la recherche d'observation ayant un effet majeur sur l'analyse et aussi sur les statistiques des erreurs

d'analyse. Il faut aussi souligner qu'aux zones peu observées de l'atmosphère correspond une matrice de variance-covariances des erreurs d'analyse qui est très proche de celle de l'ébauche. Une démarche de *mise à jour* des fonctions de structure de  $\mathbf{B}$  semble donc consistante avec les objectifs de notre étude.

L'idée est de supposer que l'ajout de l'information correspondant aux observations dans l'analyse se traduit par une modification assez légère de  $\mathbf{B}$  pour obtenir  $\mathbf{A}$ , au sens où seule une partie des deux matrices diffère. De plus l'équation (3.4) implique que la matrice de *mise à jour* soit d'un rang inférieur ou égal à  $p$  ( $p$  est supposé inférieur à  $n$ ). L'approche choisie va donc estimer l'opérateur correspondant à  $\mathbf{A}$  sous la forme du calcul d'un jeu de vecteurs propres.

### Les étapes de la détermination des vecteurs de *mise à jour*

Le calcul numérique des vecteurs de *mise à jour* se fait en deux étapes successives :

La première étape consiste en la décomposition en facteurs propres de la Hessienne elle-même en utilisant un algorithme de Lanczos. Cette étape est directement liée au processus de minimisation de la fonction objective  $J$ .

La seconde étape permet de déduire les vecteurs dits de *mise à jour* de la précédente décomposition de la Hessienne qui n'est que partielle. L'équation (3.4) se réécrit donc :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T \quad (3.5)$$

où les  $l$  colonnes de la matrice rectangulaire ( $l \times n$ )  $\mathbf{V}$  sont les  $l$  vecteurs de *mise à jour*. Nous allons détailler ces calculs ci-dessous.

#### Étape 1 : L'algorithme de Lanczos

L'algorithme de Lanczos est utilisé dans un espace euclidien. Ceci implique qu'il faut procéder tout d'abord à un changement de variable de telle sorte que les variables du modèle soient alors sans dimension. Ceci implique le passage d'un vecteur d'état du modèle qui contient des grandeurs physiques bien distinctes (tourbillon, divergence, température, humidité spécifique et pression de surface) (dimension physique notée  $X = [\mathbf{x}]$ ) vers un vecteur sans dimension physique qui sera utilisé dans l'algorithme de Lanczos. Ce changement de variable est obtenu en multipliant chaque paramètre du vecteur d'état par la racine carrée des coefficients de la norme de l'énergie  $\mathcal{E}$  (cf. équation 2.11).

L'algorithme de Lanczos permet d'estimer les facteurs propres d'une matrice symétrique selon une approche itérative (cf. annexes A.2.1 et A.3). Cet algorithme est particulièrement intéressant dans le cas de matrices qui ne sont pas décrites explicitement, mais connues sous la forme d'un opérateur. C'est le cas de matrices très larges dont les composantes ne peuvent être stockées du fait de la dimension de ces matrices (cas fréquent pour la prévision numérique opérationnelle). Il est alors possible de limiter le calcul à la détermination des premiers facteurs propres seulement (valeurs propres les plus élevées). Ainsi la décomposition

n'est que partielle. Des détails à propos de cet algorithme pour l'estimation de  $\nabla\nabla J^{-1}$  et les explications théoriques additionnelles sont donnés en annexe (A.2).

Cette décomposition partielle peut s'écrire ainsi :

$$\nabla\nabla J \simeq \sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{w}_i$  est le  $i^e$  vecteur propre (et  $l \ll n$ ).

### Étape 2 : le calcul des vecteurs de *mise à jour*

La seconde étape du calcul de l'opérateur  $\mathbf{A}$  consiste en la mise en forme des vecteurs dits de *mise à jour* de  $\mathbf{B}$ .

Pour cela, la formule (3.6) ci-dessus est réarrangée selon (3.7) :

$$\nabla\nabla J \simeq I_n + \sum_{i=1}^l (\lambda_i - 1) \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T \quad (3.7)$$

où  $I_n$  est la matrice identité de dimension  $n$ . Les vecteurs  $\mathbf{s}_i = (\lambda_i - 1)^{1/2} \mathbf{w}_i$  seront les colonnes d'une matrice rectangulaire  $\mathbf{S}$  (de dimension  $l \times n$ ) de telle sorte que

$$\nabla\nabla J \simeq I_n + \mathbf{S}\mathbf{S}^T \quad (3.8)$$

La formule de **Shermann-Morrison-Woodbury** (Hager, 1989) appliquée à (3.8) permet alors d'inverser la Hessienne. Le terme de *mise à jour* subsistant étant d'une dimension  $l$  petite, il est plus aisé de le manipuler. Une décomposition de Cholesky fait apparaître le terme de *mise à jour* sous une forme quadratique :

$$\nabla\nabla J^{-1} = I_n - \mathbf{S}\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{S}\mathbf{U}^{-1})^T \quad (3.9)$$

où la matrice  $\mathbf{U}$  résulte de l'application de la formulation de **Shermann-Morrison-Woodbury** à l'équation (3.8) (non détaillé). Les  $l$  vecteurs de *mise à jour* ne sont autres que les colonnes de la matrice rectangulaire ( $l \times n$ )  $\mathbf{V} = \mathbf{S}\mathbf{U}^{-1}$ . Au final, l'estimation de l'inverse de la Hessienne s'écrit donc :

$$\nabla\nabla J^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T \quad (3.10)$$

On renvoie le lecteur aux annexes (A.1) et (A.2.2) pour plus de détails sur la mise en forme de ces vecteurs de *mise à jour*.

### Le calcul de $\mathbf{c} = \mathbf{A}\nabla_{x_a} \mathcal{J}$

Le calcul de  $\mathbf{c}$  s'écrit donc en substituant le second terme de l'équation (3.5) dans la définition (3.3) de ce vecteur :

$$\mathbf{c} = (\mathbf{B}\nabla_{x_a} \mathcal{J}) - (\mathbf{V}\mathbf{V}^T \nabla_{x_a} \mathcal{J}) \quad (3.11)$$



Nous avons vu que  $\mathbf{V}$  est une matrice de  $l$  colonnes de longueur  $n$ ; on note  $\mathbf{v}_i$  ces vecteurs de *mise à jour* ( $i = 1, 2 \dots l$ ). L'application de  $\mathbf{A}$  au vecteur  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  nécessite donc deux opérations qui apparaissent dans l'équation (3.11). La première opération concerne la projection de la matrice de *mise à jour* sur le vecteur  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ . Cela consiste en une combinaison linéaire des vecteurs de *mise à jour*. Cette combinaison utilise  $l$  coefficients  $\alpha_i$ , résultant des  $l$  produits scalaires entre les vecteurs  $\mathbf{v}_i$  et  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ : on note  $\alpha_i = \mathbf{v}_i^T (\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J})$ .

Au bout du compte,  $\mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  s'écrit ainsi :

$$\mathbf{c} = \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \simeq (\mathbf{B} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}) - \left( \sum_{i=1}^l \alpha_i \mathbf{v}_i \right) \quad (3.12)$$

La seconde opération correspond au premier terme de (3.12) et consiste en la projection de  $\mathbf{B}$  sur  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ . Dans le code variationnel de ARPEGE, on n'a pas une connaissance explicite de  $\mathbf{B}$  pour les raisons que nous avons exposées dans le paragraphe (3.2.2). Nous utilisons plutôt sa décomposition selon la formule (3.1) en deux opérateurs successifs de changement de variable. Il faut appliquer ces opérateurs à  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  pour obtenir le premier terme de (3.12).

Le résultat de la différence entre ces deux termes produit enfin  $\mathbf{c}$ . Les vecteurs  $\mathbf{v}_i$  sont déterminés durant la phase directe de l'assimilation variationnelle et sont stockés dans la mémoire du calculateur. Une fois  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  calculé, on procède aux  $l$  produits scalaires entre  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  et les  $\mathbf{v}_i$  ainsi qu'à la projection de  $\mathbf{B}$  sur  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ . La différence finale dont  $\mathbf{c}$  résulte, est stockée dans un fichier.

### De la nature de $\mathbf{c} = \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$

La projection de  $\mathbf{A}$  sur la direction instable  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  réserve une interprétation intéressante, bien que ce calcul ne soit qu'étape intermédiaire du calcul de la sensibilité aux observations.

Pour cela, plaçons nous à nouveau dans le cadre théorique du BLUE. On considère que les matrices et opérateurs y représentent réellement les grandeurs (variance-covariances d'erreur) qu'ils se doivent de décrire.

Considérons la variation  $\delta \mathcal{J}$  produite par la perturbation  $\delta \mathbf{x}^a$  des conditions initiales de la prévision choisie telle que  $\delta \mathbf{x}^a = \zeta^a$ . D'après la définition du gradient (cf. équation 2.18b), le scalaire  $\delta \mathcal{J}$  peut être estimé par  $\zeta^{aT} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ . Soit à présent le vecteur d'erreur d'analyse pondéré par ce scalaire ( $\zeta^a \delta \mathcal{J}$ ) et considérons son espérance statistique. On obtient :

$$E(\zeta^a \delta \mathcal{J}) = E(\zeta^a \zeta^{aT}) \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \quad (3.13a)$$

$$= \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \quad (3.13b)$$

car  $\zeta^a$  est supposée non biaisée et  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  peu sensible aux petites variations de trajectoires. L'espérance du produit des erreurs d'analyse par la variation  $\delta \mathcal{J}$  est en fait la covariance des erreurs d'analyse avec les perturbations de  $\mathcal{J}$  qu'elle peuvent générer. Cette nature de covariance explique le choix de la nomenclature  $\mathbf{c}$ . En effet,  $\mathbf{c}$  étant la covariance d'un vecteur avec un scalaire, la dimension de cette covariance est aussi un vecteur. Sa dimension physique est  $[\mathbf{c}] = X \times Q$  où  $Q$  est la dimension physique de  $\mathcal{J}$ .

Cette covariance s'exprime alors comme une fonction de structure de  $\mathbf{A}$  correspondant à l'aspect  $\mathcal{J}$  de la prévision étudiée. Définie dans l'espace du modèle, une telle fonction synthétise déjà beaucoup l'influence de l'algorithme d'assimilation sur les sensibilités. L'examen de la formulation (2.48) montre que l'effet des distances de corrélation (ou portées) et de balances statistiques décrites dans  $\mathbf{B}$  (et qui apparaissent dans  $\mathbf{A}$ ) sont traduites au niveau de  $\mathbf{c}$  dans le calcul de sensibilité aux observations. Ainsi, l'examen de  $\mathbf{c}$  permet d'avoir un accès à la modification spatiale des structures sensibles par le processus d'assimilation.

### 3.3.3 Finalisation du calcul de la sensibilité aux observations

Afin de finaliser le calcul de sensibilité aux observations, il reste une dernière étape du calcul à effectuer : il s'agit d'interpoler le vecteur  $\mathbf{c} = \mathbf{A}\nabla_{\mathbf{x}_a}\mathcal{J}$  dans l'espace des observations et de lui appliquer l'inverse de l'opérateur des statistiques des erreurs d'observation. Cette toute dernière étape s'effectue donc dans l'espace des observations.

Cette étape n'a pas de coût très important puisqu'elle revient, à quelques opérations près, au calcul de la fonction objective  $J$ . Celui-ci est effectué de nombreuses fois au cours de la minimisation dans l'algorithme variationnel. Son coût unitaire est relativement modeste du fait de l'absence de modèle linéaire tangent dans la configuration du 3D-Var. Ce coût dépend cependant du nombre d'observations qu'il faut traiter.

Nous avons vu que le calcul de la fonction objective du 3D-Var comporte une partie spécifique aux observations notée  $J_o$ , dont la formule incrémentale (cf. équation 2.85 pour cette formulation incrémentale de  $J$ ) en 3D-Var s'écrit :

$$J_o = (\mathbf{d} - \mathbf{H}\delta\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{H}\delta\mathbf{x}) \quad (3.14a)$$

$$= \left( \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{d} - \mathbf{H}\delta\mathbf{x}) \right)^T \left( \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{d} - \mathbf{H}\delta\mathbf{x}) \right) \quad (3.14b)$$

et pratiquement  $J_o$  est calculée comme  $J_o = \langle \mathbf{D}^o; \mathbf{D}^o \rangle_Y$  où  $\mathbf{D}^o = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{d} - \mathbf{H}\delta\mathbf{x})$  est l'écart entre incrément  $\delta\mathbf{x}$  et innovation  $\mathbf{d}$  pondéré par les écarts types d'erreur d'observation  $\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}$  (opérateur simple car  $\mathbf{R}$  est diagonale).  $\mathbf{D}^o$  est une grandeur sans dimension physique et  $\langle ; \rangle_Y$  représente ici le produit Euclidien.

Nous avons vu que  $\mathbf{d}$  est constant au cours de la minimisation (cf. partie 3.2.2), la variable est  $\delta\mathbf{x}$ , uniquement. Si le vecteur d'entrée du calcul n'est pas  $\delta\mathbf{x}$ , mais l'opposé de  $\mathbf{c}$  et que la comparaison à l'innovation n'est pas effectuée (ou si l'innovation est nulle :  $\mathbf{d} = 0$ ), on retrouve presque l'expression de la sensibilité aux observations. Dans ce cas très particulier nous avons donc :

$$\mathbf{D}^o = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}(0 + \mathbf{H}\mathbf{c}) \quad (3.15)$$

Il faut pondérer  $\mathbf{D}_i^o$  dans (3.15) par les écarts types d'erreurs d'observation pour obtenir l'équation (3.16) de la sensibilité aux observations.

$$\nabla_{\mathbf{y}_o}\mathcal{J} = \mathbf{R}^{-\frac{T}{2}}\mathbf{D}^o \quad (3.16)$$

Ainsi, lorsqu'on calcule  $\mathbf{H}^T \nabla_{y_o} \mathcal{J}$  on retrouve la formule (3.17) du gradient de la fonction objective relative aux observations :

$$\nabla J_o = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{H} \delta \mathbf{x}) \quad (3.17)$$

avec  $\delta \mathbf{x} = -\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d} = 0$ .

Le code du modèle ARPEGE a été modifié en conséquence pour extraire l'information de la sensibilité aux observations  $\nabla_{y_o} \mathcal{J}$  avant l'application de l'adjoint  $\mathbf{H}^T$  de l'opérateur d'observation linéaire  $\mathbf{H}$ . Cette application de l'opérateur  $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}$  au vecteur  $\mathbf{c}$  correspond à la seconde boîte de l'entité  $\mathbf{K}^T$  sur la figure (3.2). Ce calcul implique que, mises à part quelques modifications mineures, le code utilisé (interpolation d'un incrément dans l'espace des observations) est celui en place dans la version incrémentale de l'algorithme du 3D-Var utilisé en mode opérationnel.

### Schéma de bilan

La figure (3.3) représente les étapes logicielles du calcul de la sensibilité aux observations. Chaque *rectangle* représente une étape de calcul, chaque *cylindre* représente des données, qu'elles soient sous la forme de vecteur d'état, de statistiques d'erreur ou encore d'observations. Les vecteurs de *mise à jour* sont eux aussi représentés sous cette forme. Les *grilles* représentent des diagnostics qui sont extraits des calculs numériques.

La partie large sur la gauche représente l'instant initial, c'est-à-dire l'instant pour lequel sont valides les données qui y apparaissent. Le dégradé de la tonalité du fond (vers la droite) indique la progression dans le temps. L'instant final correspondant à la prévision se situe à l'extrême droite.

Le processus algorithmique se lit donc en suivant les flèches et la chaîne de boîtes rectangulaires ainsi formée. Le point de départ est en haut à gauche. La première phase d'assimilation-prévision se traduit donc par un aller complet vers la droite. C'est le calcul *direct*. Ensuite, on effectue un retour vers la gauche de la figure au fur et à mesure des étapes du calcul *adjoint*.

### 3.3.4 Calcul de la sensibilité à l'ébauche

Dans la partie théorique nous avons aussi défini le concept de sensibilité à l'ébauche. L'équation (2.41) donne la définition de cette sensibilité et fait apparaître son lien avec la sensibilité aux observations.

Ainsi les étapes du calcul de la sensibilité à l'ébauche ne sont guère différentes de celles de l'estimation de la sensibilité aux observations. Une fois le calcul correspondant à l'équation (3.17) effectué, la différence avec la sensibilité aux conditions initiales de la prévision ( $\nabla_{x^a} \mathcal{J}$  dans le premier terme de l'équation 2.41a) produit le vecteur de sensibilité à l'ébauche.

Ce calcul consiste en un transfert de l'information de la sensibilité aux observations vers l'espace du modèle.

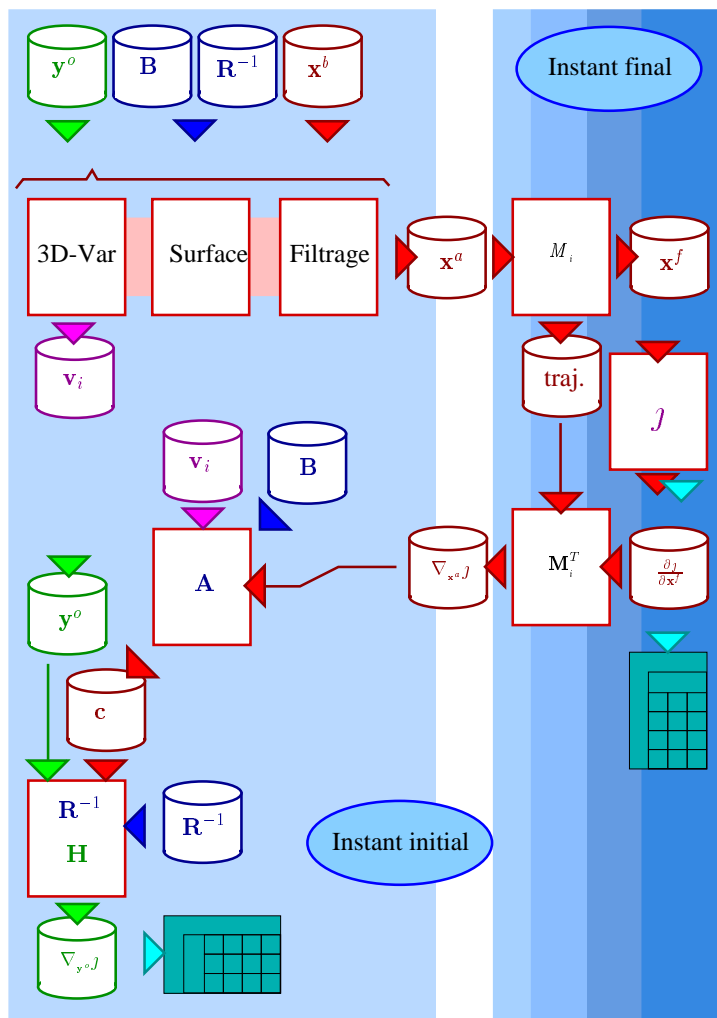


FIG. 3.3: Schématisation des étapes logicielles du calcul de sensibilité avec le 3D-Var de ARPEGE. Les rectangles représentent les étapes de calcul, c'est-à-dire l'utilisation du modèle. Les cylindres représentent les données d'entrée et de sortie de ces calculs. Les notations des équations du texte sont utilisées pour désigner ces données. Enfin, les tableaux ou grilles représentent des diagnostics (calcul de l'amplitude de la fonction coût, utilisation des observations) disponibles en sortie de certains calculs. Le point de départ de la lecture de ce schéma (et du système) est en haut à gauche. Le temps passe du présent des observations à gauche de la figure à l'instant final (la prévision) sur la droite.

### 3.3.5 Discussion de choix techniques

La technique de *mise à jour* des statistiques d'erreur de l'ébauche, employée ici, possède ses avantages comme des inconvénients. Au nombre des premiers on recense le fait que le modèle ARPEGE utilise la détermination des vecteurs propres de la Hessienne pour d'autres fins que l'estimation de l'inverse de celle-ci. En effet, ces vecteurs propres peuvent être utilisés dans le préconditionnement de la minimisation en les intégrant au changement de variable de contrôle (cf. partie 3.2.2). C'est le "démarrage à chaud" de la minimisation, surtout intéressant dans le cadre du cyclage de l'assimilation (Andersson *et al.*, 2000). De ce fait, les algorithmes

de Lanczos sont déjà en place et validés.

De plus, la technique des vecteurs de *mise à jour* permet qu'une fois ces vecteurs déterminés, le calcul de la sensibilité aux observations puisse être effectué sans passer par l'étape d'une assimilation 3D-Var. On peut simplement changer le vecteur d'entrée, à savoir  $\nabla_{x_a} \mathcal{J}$ , dans le calcul de  $\mathbf{c}$  (équation 3.3). Ainsi, diverses études de sensibilité aux observations peuvent être conduites, en changeant la fonction coût  $\mathcal{J}$  (nature, domaine géographique et échéance d'application) et donc son gradient, sans pour autant repasser par une étape de détermination des vecteurs.

Au nombre des désavantages, on comptera le nombre de vecteurs à stocker afin de garantir une *mise à jour* suffisamment précise de  $\mathbf{B}$  afin que l'approximation de  $\mathbf{A}$  soit satisfaisante. En outre, il est indispensable d'effectuer une assimilation des observations  $\mathbf{y}^o(t_i)$  (ce qui implique de connaître les valeurs mesurées par  $\mathbf{y}^o(t_i)$ ) pour générer les vecteurs de *mise à jour*, alors que seules les statistiques  $\mathbf{R}$  et le déploiement  $\mathbf{H}$  des observations suffisent théoriquement à la détermination de  $\mathbf{A}$ . Cependant, ce désavantage n'en est pas un, dans un cadre diagnostique.

Nous illustrerons certaines considérations relatives à l'exactitude de l'opérateur de l'adjoint de l'assimilation (et de l'estimation de  $\mathbf{A}$ ) dans les parties suivantes (parties 3.4.1 et 3.4.2) lorsque, valeurs numériques à l'appui, nous pourrions détailler nos propos. Mais avant de présenter des éléments de validation de la méthode de sensibilité aux observations, nous souhaitons signaler au lecteur l'existence d'autres possibilités de calcul de la sensibilité aux observations. Les différences majeures résident dans l'estimation de l'inverse d'une matrice ( $\nabla \nabla J$  ou autre) de grande dimension.

### Le calcul direct de $\mathbf{c} = \mathbf{A} \nabla_{x_a} \mathcal{J}$

Nous avons fait le choix des vecteurs de *mise à jour* pour conserver une certaine souplesse logicielle et une cohérence avec le code existant du modèle ARPEGE. Nous possédons une base de vecteurs que nous pouvons utiliser avec divers champs de sensibilité en *entrée* du calcul de sensibilité aux observations. Cependant, il existe d'autres méthodes pour résoudre le problème linéaire posé par la détermination du vecteur  $\mathbf{c}$  (de dimension  $n$ ) c'est-à-dire la première étape du calcul de l'adjoint de l'opérateur d'assimilation :

$$\mathbf{c} = (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \nabla_{x_a} \mathcal{J} \quad (3.18)$$

Si on a la possibilité de calculer la projection de la Hessienne de  $J$  (c'est-à-dire  $[\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]$ ) sur un vecteur donné de dimension  $n$ , alors la détermination de  $\mathbf{c}$  -qui demande une estimation de l'inverse de cette Hessienne- passe par la solution du système linéaire suivant :

$$(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}) \mathbf{z} = \nabla_{x_a} \mathcal{J} \quad (3.19)$$

L'inconnue de l'équation (3.19) à déterminer est  $\mathbf{z}$  qui annule le gradient  $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}}$  de la fonction

$F(\mathbf{z})$  suivante :

$$F(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{z} + \frac{1}{2}\mathbf{z}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$$

On remarque que  $F$  découle de la fonction objective  $J$  du variationnel avec un terme supplémentaire ( $\mathbf{z}^T \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$ ) linéaire en  $\mathbf{z}$ . Le vecteur  $\mathbf{c}$  annule le gradient de cette nouvelle fonction  $F$ . Nous n'avons pas testé cette approche durant ce travail.

La solution de l'équation (3.19) peut être obtenue par des algorithmes standards utilisant des méthodes numériques efficaces (Barkmeijer *et al.*, 1998). Cependant, une des difficultés réside dans la dimension  $n \times n$  ( $n$ , dimension du vecteur d'état) de  $\mathbf{A}^{-1}$ . D'autre part pour chaque estimation de  $\mathbf{c}$  (nouveau domaine ou type de fonction coût  $\mathcal{J}$ , par exemple) et donc de  $\nabla_{\mathbf{y}_o} \mathcal{J}$ , il faut avoir recours à ce calcul complet.

Cette méthode n'ayant pas été testée, son coût calculatoire n'a pas été évalué ni comparé à celui de la méthode précédente (vecteurs de *mise à jour*).

### Une technique dans l'espace des observations (Baker et Daley, 2000)

Dans la partie théorique de ce mémoire de thèse, nous avons montré qu'il y avait deux formulations possibles pour estimer la sensibilité aux observations. On rappelle ci-dessous ces deux formulations qui impliquent des choix techniques différents.

La formulation que nous avons choisie est donnée par l'équation (2.48) :

$$\nabla_{\mathbf{y}_o} \mathcal{J} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$$

N. Baker (Baker et Daley, 2000) utilise une autre formulation donnée par l'équation (2.45) que nous rappelons ci-dessous :

$$\nabla_{\mathbf{y}_o} \mathcal{J} = (\mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$$

La difficulté de cette approche réside dans le calcul de  $(\mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$ . Cette matrice symétrique est définie dans l'espace des observations. Sa dimension ( $p \times p$ ) dépend donc du nombre de données observées qui interviennent dans le processus d'assimilation. La solution du calcul de sensibilité est ainsi obtenue par un premier calcul du vecteur de dimension  $p$  :

$$\mathbf{b} = \mathbf{H} \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$$

Il s'agit ensuite de résoudre le système linéaire donné par :

$$(\mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{y}_o} \mathcal{J} = \mathbf{b}$$

où l'inconnue à déterminer est  $\nabla_{\mathbf{y}_o} \mathcal{J}$ . On se retrouve alors dans le même cadre algorithmique que celui de l'approche proposée dans la partie 3.3.5. Si le jeu d'observation est réduit, ce calcul peut s'effectuer très aisément. Par exemple, dans le cas d'une observation unique, la seule difficulté réside dans la première phase du calcul, puisqu'une fois dans l'espace de l'observation, les termes manipulés sont des scalaires (et non plus des vecteurs).

### 3.3.6 Conclusion de la partie 3.3

Nous venons de détailler l'algorithme de sensibilité aux observations que nous avons mis en place dans le cadre de l'assimilation variationnelle 3D du modèle de prévision numérique ARPEGE. Les étapes les plus importantes et les plus novatrices sont celles qui permettent d'estimer l'adjoint du processus variationnel d'assimilation pour le modèle ARPEGE de Météo-France. Nous avons ainsi pu faire apparaître les liens qui unissent équations théoriques de l'assimilation et l'algorithmique du 3D-Var avec leurs pendants adjoints.

La concrétisation de cette approche en sensibilité aux observations a nécessité de faire des choix stratégiques pour le calcul, puisque le développement de l'adjoint ne s'est pas fait par transposition d'un modèle linéaire déjà existant (un modèle de BLUE, en l'occurrence). De plus, nous avons argumenté nos choix dans un panel de solutions algorithmiques dont nous avons brièvement présenté les alternatives.

On comprend bien qu'il est nécessaire de procéder à la validation de notre méthode de calcul. Les tests de validation devraient à la fois valider l'estimation de  $\mathbf{A}$  ainsi que d'en chiffrer la précision, mais aussi évaluer les limites de l'algorithme de la sensibilité aux observations développé dans le cadre du 3D-Var d'ARPEGE.

## 3.4 Validations

Les études de validation de la sensibilité aux observations sont indispensables mais ont aussi donné l'occasion de mettre en avant des propriétés de la méthode et d'illustrer quelques résultats collatéraux intéressants en matière d'assimilation de données. Elles permettront aussi au lecteur de se familiariser avec les résultats que peut générer l'outil de la sensibilité aux observations avant de détailler des études de cas. Dans cette partie, nous nous focaliserons avant tout sur la validation de l'adjoint des processus d'assimilation correspondant à  $\mathbf{K}^T$  sur la figure (3.2). En effet, l'adjoint du modèle de prévision ( $\mathbf{M}^T$ ) a déjà fait l'objet de nombreuses études et est considéré comme validé.

Dans un premier temps, nous allons essayer de mesurer la justesse de l'approche de *mise à jour* des statistiques d'erreur que nous avons choisie pour estimer  $\mathbf{c}$  (première partie du calcul de  $\mathbf{K}^T \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ ). Nous ferons donc une étude assez détaillée sur les vecteurs de *mise à jour*. Nous verrons ensuite comment converge l'estimation de  $\mathbf{c}$  (cf. équation 3.3) en fonction du nombre de vecteurs utilisés dans l'estimation de  $\mathbf{A}$ . Enfin, nous étudierons la robustesse de cette approche au travers de quelques tests numériques.

### 3.4.1 Les vecteurs de *mise à jour*

#### Aspects théoriques

Après avoir présenté en détail les principes et la philosophie de la technique que nous avons choisie pour estimer les statistiques d'erreur de l'analyse, il nous faut valider ce choix.

Le but de ce paragraphe est de documenter les vecteurs de *mise à jour* qui interviennent dans l'estimation de l'opérateur  $\mathbf{A}$  (sous la forme de  $\mathbf{V}\mathbf{V}^T$ , cf. équation 3.5). Pour valider ces vecteurs, il nous faut pouvoir les confronter à une référence. Comme les statistiques sur les erreurs d'analyse sont inconnues, on doit se placer dans les conditions particulières d'expériences avec une observation unique afin de tirer parti de propriétés intéressantes qui nous permettent de comparer des informations sur les statistiques des erreurs d'analyse et sur les statistiques représentées par les vecteurs de *mise à jour*.

Dans ce cas particulier d'expérience avec une seule observation, il est possible d'extraire du processus d'assimilation une estimation des fonctions de structure de  $\mathbf{A}$  (Thépaut *et al.*, 1996). Nous avons déjà illustré ceci dans la partie concernant des exemples simples (partie 2.3.3). Ainsi, l'incrément d'analyse obtenu par l'assimilation d'une observation unique est directement proportionnel à une fonction de structure qui lui correspond (cf. équation 2.60).

Nous avons vu dans la partie 3.3, que la dimension théorique maximale de  $\mathbf{V}$  est  $p \times n$ , où  $p$  est le nombre d'observation et  $n$  la dimension du vecteur dans le modèle. Dans le cas d'une expérience où une seule observation est assimilée,  $p = 1$  et l'unique vecteur de *mise à jour* est proportionnel à la fonction de structure de  $\mathbf{B}$  qui correspond au paramètre observé. Par ailleurs,  $\mathbf{A}$  peut s'exprimer à l'aide de la formulation de Sherman-Morrison-Woodbury (reprise de l'équation (2.58) ou encore de l'équation (3.4) :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H}\mathbf{B} \quad (3.20)$$

d'où, d'après l'équation (3.5),

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H}\mathbf{B}. \quad (3.21)$$

Dans le cas d'une seule observation,  $\mathbf{H}^T$ , l'opérateur d'observation linéaire est un vecteur de même dimension que le vecteur d'état du modèle. Notons  $\mathbf{h}^T$  cet opérateur.  $\mathbf{R}$  est un scalaire noté  $\sigma_o^2$  et  $\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T$  est le scalaire  $\sigma_b^2$  correspondant à la variance des erreurs des paramètres du modèle correspondant à l'observation. L'équation (3.21) s'écrit donc :

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \frac{1}{\sigma_o^2 + \sigma_b^2} \mathbf{B}\mathbf{h}^T \mathbf{h}\mathbf{B} \quad (3.22)$$

d'où

$$\mathbf{V} = (\sigma_o^2 + \sigma_b^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B}\mathbf{h}^T \quad (3.23)$$

et  $\mathbf{B}\mathbf{h}^T$  n'est autre que la fonction de structure associée à l'observation unique  $\mathbf{y}^o$ . Nous avons donc un moyen de vérifier la structure et l'amplitude du vecteur de *mise à jour* que produit l'algorithme variationnel, par comparaison de celui-ci avec l'incrément d'analyse obtenu par  $\delta\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b$  sachant que (cf. équation 2.60) :

$$\delta\mathbf{x}^a = \left( \frac{\mathbf{y}^o - \mathbf{h}\mathbf{x}^b}{\sigma_o^2 + \sigma_b^2} \right) \mathbf{B}\mathbf{h}^T \quad (3.24)$$



Dans la réalité du modèle ARPEGE, même dans le cas d'une observation unique, l'opérateur  $\mathbf{h}^T$  conserve une certaine complexité. Il n'est donc pas stocké comme un vecteur d'état bien qu'il en ait les dimensions. Comme le modèle ARPEGE est spectral,  $\mathbf{h}^T$  implique des transformées de Fourier et de Legendre avant de disposer des données de l'ébauche sur une grille avec laquelle effectuer des interpolations horizontale et verticale avec le point d'observation. Cette complexité augmente encore, même dans ce cas d'observation unique, dès lors qu'on utilise une observation vectorielle telle une observation de vent (il faut définir deux composantes et observer deux paramètres).

Ceci explique notre choix d'une observation unique de température (observation scalaire) pour les toutes premières validations et appliquer la formule (3.24). On s'intéressera au cas des observations de vent par la suite.

### Observation unique de température

L'observation de température unique est choisie dans une situation de la POI17 de FASTEX: le 17 février 1997 à 18h TU. L'observation est simulée à la verticale du point 40° Nord et 40° Ouest. L'altitude de cette observation est exprimée en pression et est choisie de telle sorte que l'observation simulée soit proche d'un niveau du modèle: on cherche ainsi à minimiser l'influence de l'opérateur d'interpolation verticale. La pression est choisie à 586.73 hPa, correspondante au niveau 17 du modèle (qui en compte 31). La valeur simulée de l'observation est de 265.98 K pour une valeur de l'ébauche en ce point de 265.85 K. La valeur de l'innovation est donc de 0.13 K soit un dixième de l'écart type d'erreur d'observation qui lui est assigné. Cette observation est assimilée comme un message TEMP (observation du type radiosondage). Nous récapitulons les caractéristiques de cette observation dans le tableau (3.1) donné ci-après:

Longitude	Latitude	Pression	Mesure	Innovation	$\sigma_o$	$\sigma_b = (\mathbf{hBh}^T)^{\frac{1}{2}}$
40° Ouest	40° Nord	586.73 hPa	265.98 K	0.13 K	1.3 K	1.05 K

TAB. 3.1: Caractéristiques de l'observation simulée et des valeurs de l'ébauche associées pour une expérience effectuée à la date du 17 février 1997 à 18h TU.

Par ailleurs, la valeur de l'incrément d'analyse théorique (pas d'effet de l'interpolateur, cf. équation 3.24) en ce point d'observation est de  $\mathbf{h}\delta\mathbf{x}^a \simeq 0.051325 K$ . On peut donc vérifier la relation existant entre les équations (3.23) et (3.24) qui est:

$$\mathbf{h}\delta\mathbf{x}^a = \frac{\mathbf{d}}{(\sigma_o^2 + \sigma_b^2)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{hV} \quad (3.25)$$

On obtient  $\frac{\mathbf{d}}{(\sigma_o^2 + \sigma_b^2)^{\frac{1}{2}}} = 7.7794 \times 10^{-2}$  qu'il faut comparer au rapport  $\frac{\mathbf{h}\delta\mathbf{x}^a}{\mathbf{hV}} = 7.7343 \times 10^{-2}$  ( $\mathbf{hV} = 0.66359 K$ ). Ces applications numériques montrent qu'il subsiste un effet des interpolateurs, mais qui reste minime (inférieur à 10%).

Le lecteur remarquera que le calcul de la variance d'erreur de l'état analysé donne  $\mathbf{hAh}^T = 0.6672 K^2$  qui est inférieure à la variance de l'erreur de l'ébauche  $\mathbf{hBh}^T = 1.1025 K^2$ .

Considérons maintenant les aspects morphologiques de ces vecteurs. La figure (3.4) présente l'incrément d'analyse  $\delta\mathbf{x}^a$  et le vecteur de *mise à jour*  $\mathbf{V}$ , obtenus lors de l'assimilation 3D-Var de l'observation décrite précédemment. D'une façon générale, les deux figures sont très proches et les amplitudes (cf. intervalle des isolignes des figures concernées) respectent assez bien la relation numérique donnée ci-dessus (équation 3.25).

Ces structures sont de même signe car l'innovation est positive (cf. tableau 3.1) et illustrent bien les covariances présentes dans  $\mathbf{B}$ . Ces structures sont simples, mais cette simplicité est liée à la nature des fonctions de structure décrites dans  $\mathbf{B}$ . L'examen plus poussé de ces figures laisse cependant apparaître l'anisotropie des covariances entre longitude et latitude. Cette anisotropie est mise en valeur dans les coupes verticales zonales et méridiennes des figures (3.5) et (3.6). En effet, dans la région où a été simulée l'observation, le flux atmosphérique moyen est essentiellement zonal, et le transport des erreurs plus efficace dans cette direction. Des portées plus larges dans la direction zonale découlent de cette caractéristique du fluide atmosphérique. Ceci produit un incrément plus étendu dans cette direction.

Les figures (3.5) et (3.6) donnent des coupes verticales **zonales** (le long du 40° Nord) et **méridiennes** (le long du méridien 40° Ouest) effectuées au cœur de l'incrément  $\delta\mathbf{x}^a$  (figures **a.**) ou du vecteur de *mise à jour* de  $\mathbf{B}$  (figures **b.**), pour la température. Elles sont majoritairement équivalentes dans la troposphère (partie en tracé continu), alors que les franges de l'incrément apparaissent légèrement plus vastes que celles de  $\mathbf{V}$  dans la partie supérieure correspondant à la stratosphère.

Selon ce point de vue, l'incrément a une structure dipolaire verticale qui est le fruit de relations dynamiques entre les covariances des erreurs sur la température à différents niveaux de la verticale. Nous appellerons ces relations des *balances*, puisqu'elles sont dérivées du comportement essentiellement géostrophique de l'atmosphère. Ici, la relation de *balance* illustre la stabilité verticale de l'atmosphère entre les deux couches superposées que sont troposphère et stratosphère. Ainsi l'incrément indique que l'assimilation d'une observation plus chaude que l'ébauche dans la troposphère génère un réchauffement des couches troposphériques équilibré par un refroidissement au sein de la stratosphère.

Enfin, on peut noter une variation nette des portées horizontales avec la verticale, puisque l'influence de l'observation de température est plus importante au-dessus qu'au-dessous de l'observation. Ce phénomène d'extension verticale est très net dans ce cas avec une seule observation, mais sera tout aussi important dans le cas où plusieurs observations sont assimilées. Ce processus devra donc être présent dans la sensibilité aux observations, mais sera sans doute moins aisé à identifier du fait du nombre d'observations plus élevé.

Les figures (3.6-a.) et (3.6-b.) montrent une coupe verticale **méridienne** selon le 40<sup>e</sup> méridien Ouest de l'incrément d'analyse (figure **a.**) et du vecteur de *mise à jour* (figure **b.**).

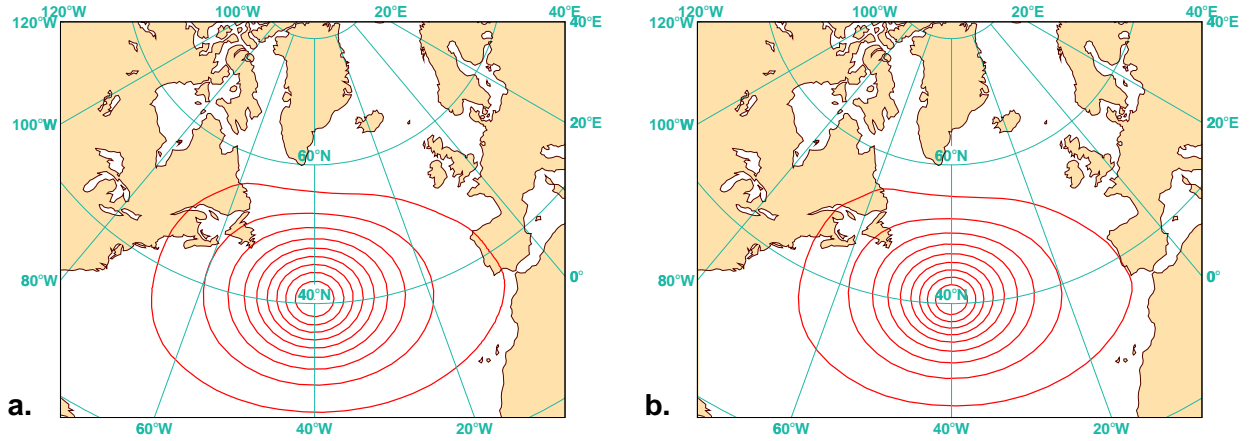


FIG. 3.4: Coupes horizontales de l'incrément d'analyse  $\delta\mathbf{x}^a$  (a.) et de l'unique vecteur  $\mathbf{V}$  de mise à jour de  $\mathbf{B}$  (b.), en température et à 586 hPa (niveau 17 du modèle). Intervalles : 0.005 K pour l'incrément (a.) et 0.065 K pour  $\mathbf{V}$  (b.). L'écart de ces isolignes provient du coefficient 0.077 de l'équation (3.23).

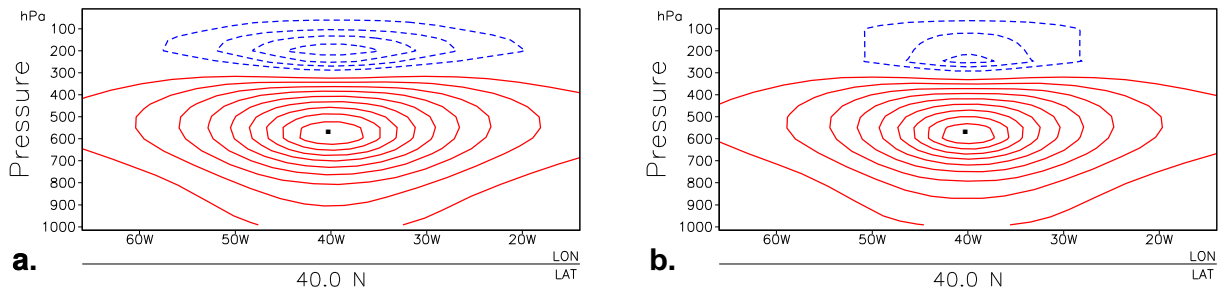


FIG. 3.5: Coupes verticales de l'incrément d'analyse  $\delta\mathbf{x}^a$  (a.) et de l'unique vecteur  $\mathbf{V}$  de mise à jour de  $\mathbf{B}$  (b.), en température et le long du 40<sup>e</sup> parallèle Nord. Les abscisses donnent les coordonnées de la trace au sol de la coupe, l'axe des ordonnées décrit la verticale en terme de pression (hPa) décroissante. Le point donne la position de l'observation de température. Intervalles : 0.005 K pour l'incrément (a.) et 0.065 K pour  $\mathbf{V}$  (b.); ce facteur d'échelle est présent pour les mêmes raisons que dans la figure (3.4).

Les deux coupes verticales montrent des champs morphologiquement très proches. Les amplitudes en jeu sont les mêmes que dans les figures (3.5) précédentes. Par ailleurs, on peut effectuer la même remarque que dans le cas des figures (3.5-a.) et (3.5-b.) concernant la variation verticale de ces portées horizontales.

En terme de distance kilométrique ( $\sim 4500$  km), la largeur des figures (3.6) et (3.5) est équivalente. Une comparaison de ces deux groupes de figures illustre bien l'anisotropie des portées horizontales qui sont beaucoup plus courtes dans la direction méridienne et qui sont consistantes avec le caractère zonal du flux atmosphérique aux latitudes tempérées.

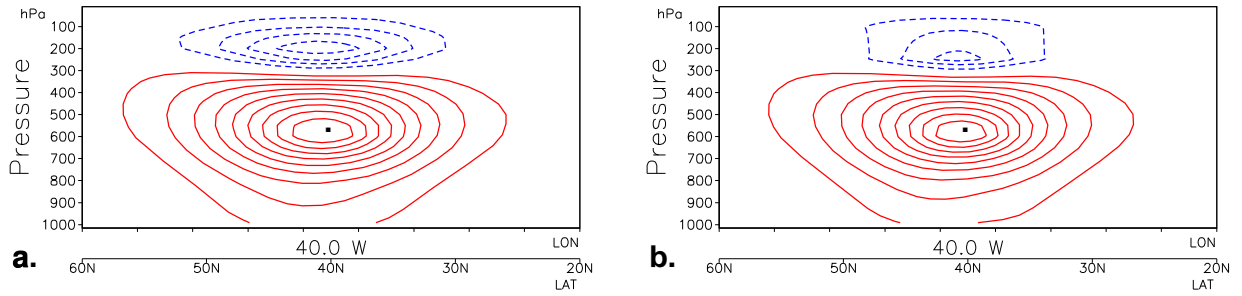


FIG. 3.6: Coupes verticales de l'incrément d'analyse  $\delta\mathbf{x}^a$  (a.) et de l'unique vecteur  $\mathbf{V}$  de mise à jour de  $\mathbf{B}$  (b.), en température et le long du 40<sup>e</sup> méridien Ouest. Intervalles: 0.005 K pour l'incrément (a.) et 0.065 K pour  $\mathbf{V}$  (b.).

Du fait des lois physiques (ici le géostrophisme) qui régissent l'écoulement atmosphérique, une modification du champ de masse (température et pression) génère une variation du champ de vent. Ceci se traduit naturellement dans le cas de l'incrément  $\delta\mathbf{x}^a$ , par la présence d'un incrément de vent alors qu'une observation de température a été assimilée. En conséquence, les covariances entre les erreurs du champ de masse et les erreurs du champ de vent ne sont pas nulles non plus. La mise à jour de  $\mathbf{B}$  par l'unique vecteur  $\mathbf{V}$  se fait donc aussi sur les statistiques d'erreur du vent dans l'analyse.

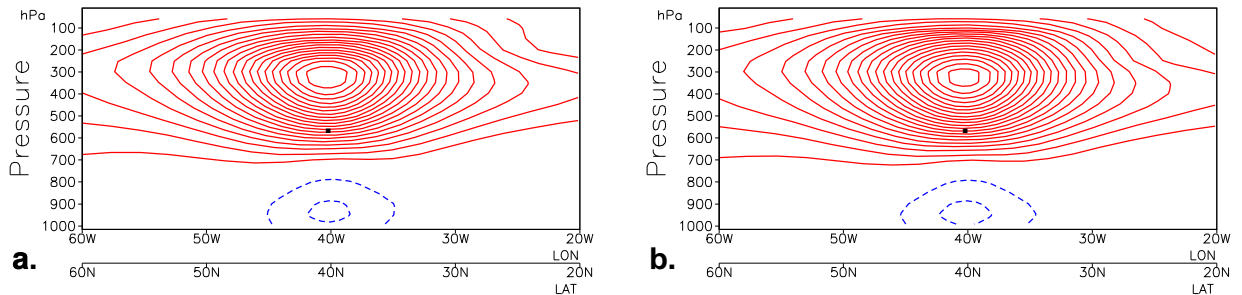


FIG. 3.7: Coupes verticales de l'incrément d'analyse  $\delta\mathbf{x}^a$  (a.) et de l'unique vecteur  $\mathbf{V}$  de mise à jour de  $\mathbf{B}$  (b.), pour la fonction de courant sur un axe N-O  $\rightarrow$  S-E. Intervalles: 4000.  $s^{-1}$  pour l'incrément (a.) et 5000.  $s^{-1}$  pour  $\mathbf{V}$  (b.). Les lignes continues impliquent une fonction courant positive soit un mouvement anticyclonique; les contours en tirets signalent une structure négative au mouvement cyclonique. Le point au centre des figures signale la position de l'observation de température.

La relation (3.25) entre  $\delta\mathbf{x}^a$  et  $\mathbf{V}$  se vérifiant pour tous les paramètres de la variable de contrôle de l'assimilation, on peut à nouveau effectuer une comparaison directe entre ces deux structures. La figure (3.7) donne la fonction de courant pour  $\delta\mathbf{x}^a$  (3.7-a.) et  $\mathbf{V}$  (3.7-b.). Les valeurs positives indiquent un mouvement anticyclonique au-dessus de l'observation de température, les valeurs négatives indiquent un mouvement cyclonique. Un réchauffement de

l'atmosphère crée un soulèvement de celle-ci générant alors une dépression vers la plancher de la troposphère et de hautes pressions contre le toit de celle-ci. Ce toit n'est autre que la tropopause (limite avec la stratosphère) où le mouvement anticyclonique est le plus important.

Les deux structures sont quasiment identiques en forme. Il existe une différence dans les amplitudes qui satisfait la relation numérique donnée auparavant (cf. équation 3.25). Le fait que les structures de tourbillon soient ainsi semblables valide bien le vecteur de *mise à jour* calculé pour ce cas d'une observation unique de température.

Nous avons vu précédemment que dans le calcul de sensibilité aux observations, il y a trois étapes :

- le calcul de la sensibilité aux conditions initiales ( $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ )
- le calcul de la projection de  $\mathbf{A}$  sur  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  (ou calcul de  $\mathbf{c}$ )
- le calcul de la sensibilité aux observations par application de  $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}$ .

L'influence des fonctions de structure ne se fera que dans la seconde étape. Nous venons d'illustrer les phénomènes de corrélations et de balances géostrophiques qui impliquent que des observations peuvent avoir une influence en d'autres points et sur d'autres paramètres que celui (ou ceux) observé(s).

Si dans le cas présenté précédemment (avec une seule observation de température), on ne se pose pas la question de l'influence relative en matière de sensibilité que peuvent avoir plusieurs observations, ce sera une considération essentielle afin d'interpréter au mieux la sensibilité au sein d'un réseau plus complexe d'observations. Si nous continuons à raisonner avec des observations "simples" (ou scalaires), comme de la température, ces influences mutuelles se conçoivent par l'effet de  $\mathbf{A}$  seulement. La relation numérique entre  $\mathbf{h}\delta\mathbf{x}^a$  et  $\mathbf{h}\mathbf{V}$  (cf. équation 3.25) reste valable pour plusieurs observations scalaires bien distinctes et indépendantes statistiquement. L'opérateur  $\mathbf{H}$  ne combine pas ces observations pour les comparer à l'ébauche. Ainsi la troisième étape du calcul de la sensibilité aux observations n'a que peu d'impact :  $\mathbf{R}$  est diagonale et  $\mathbf{H}$  est peu complexe. Avec une observation vectorielle de vent ou plusieurs observations l'interprétation des influences mutuelles entre les observations se complique.

### Observation unique de vent

Avec une observation vectorielle unique (observation de vent) l'opérateur  $\mathbf{H}$  combine l'information de chaque composante observée (la composante zonale notée  $u$  et la composante méridienne notée  $v$ ) pour les comparer aux variables de l'ébauche qui sont le tourbillon et la divergence. De plus, il existe une corrélation des erreurs commises dans l'estimation de  $u$  et  $v$  dans l'ébauche, de sorte que  $\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T$  n'est pas diagonale (alors que  $\mathbf{B}$  exprimé en tourbillon et divergence l'est; cf. formulation de  $\mathbf{B}$ ). Dans ce cas, il est plus difficile de relier directement les vecteurs de *mise à jour* (au nombre de 2) avec l'incrément d'analyse selon une relation telle que l'équation (3.25). La validation de ces vecteurs de *mise à jour* devra se faire par une

autre méthode.

L'utilisation de la formule du BLUE (cf. équation 2.26) pour le calcul de l'incrément d'analyse (avec  $\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T$ ) implique que  $\delta\mathbf{x}^a$  découle en partie d'une combinaison linéaire des 2 vecteurs de *mise à jour*. Il nous est donc possible de valider les vecteurs de *mise à jour* (et donc  $\mathbf{A}$ ) par comparaison entre les incréments d'analyse issus soit du 3D-Var après assimilation d'une observation de vent unique soit du calcul direct selon la formulation du BLUE.

Pour information, on donne les caractéristiques de l'observation de vent de cette expérience (au même point que l'observation de température précédente) dans le tableau (3.2) :

Composante	Coordonnées	Pression	Mesure
Zonale	40° W - 40° N	586.73 hPa	29.83 $m.s^{-1}$
Méridienne	40° W - 40° N	586.73 hPa	10.11 $m.s^{-1}$

Innovation	$\sigma_o$	$\sigma_b = (\mathbf{h}\mathbf{B}\mathbf{h}^T)^{\frac{1}{2}}$
0.28 $m.s^{-1}$	2.82 $m.s^{-1}$	2.90 $m.s^{-1}$
0.28 $m.s^{-1}$	2.82 $m.s^{-1}$	2.86 $m.s^{-1}$

TAB. 3.2: Caractéristiques de l'observation de vent simulée et des valeurs de l'ébauche associées pour une expérience effectuée à la date du 17 février 1997 à 18h TU.

La comparaison entre les champs de vent des deux incréments d'analyse montre une très bonne correspondance entre ceux-ci. On note  $\delta u$  et  $\delta v$  les composantes zonale et méridienne de ces incréments. L'erreur relative d'estimation de  $\delta u$  avec le BLUE par rapport à  $\delta u$  calculé par le 3D-Var est inférieure à  $0.4 \times 10^{-3}\%$ . L'erreur sur  $\delta v$  entre l'incrément issu du BLUE et du 3D-Var est du même ordre de grandeur.

En conséquence, les erreurs relatives sur l'estimation de  $u$  et  $v$  dans l'analyse par le BLUE, par rapport au 3D-Var, sont inférieures à  $0.4 \times 10^{-5}\%$ . De même, l'erreur relative sur l'énergie totale de ces incréments est inférieure à  $5.5 \times 10^{-4}\%$ . Ces incréments sont donc pratiquement identiques, ce qui est illustré par la figure (3.8). Cette figure montre côte-à-côte, la fonction courant des deux incréments d'analyse en coupe horizontale à 586 hPa. C'est une façon de valider les deux vecteurs de *mise à jour* associés à l'observation unique de vent et qui interviennent dans la formulation de  $\mathbf{A} = (\mathbf{B} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T)$  du BLUE, comme dans la formulation de la sensibilité aux observations.

Il est tout de même intéressant d'étudier comment se combinent les vecteurs de *mise à jour* associés à cette observation unique de vent et d'interpréter les relations qu'ils impliquent en matière de covariances.

### Vecteurs de *mise à jour* et incrément de vent

La figure (3.9) montre le champ de vent de l'incrément d'analyse issu du 3D-Var à 586 hPa

(fig. 3.9-a.), ainsi que les deux vecteurs de *mise à jour* associés (fig. 3.9-b. et 3.9-c.). Sur les figures des vecteurs, on a surimprimé l'axe passant par les extrêmes de la fonction courant de l'incrément en tracé continu ainsi que les axes correspondant au premier (second) vecteur de *mise à jour* en pointillés (tirets). Ceci nous permet de noter que l'axe résultant de l'incrément est placé entre ceux des vecteurs.

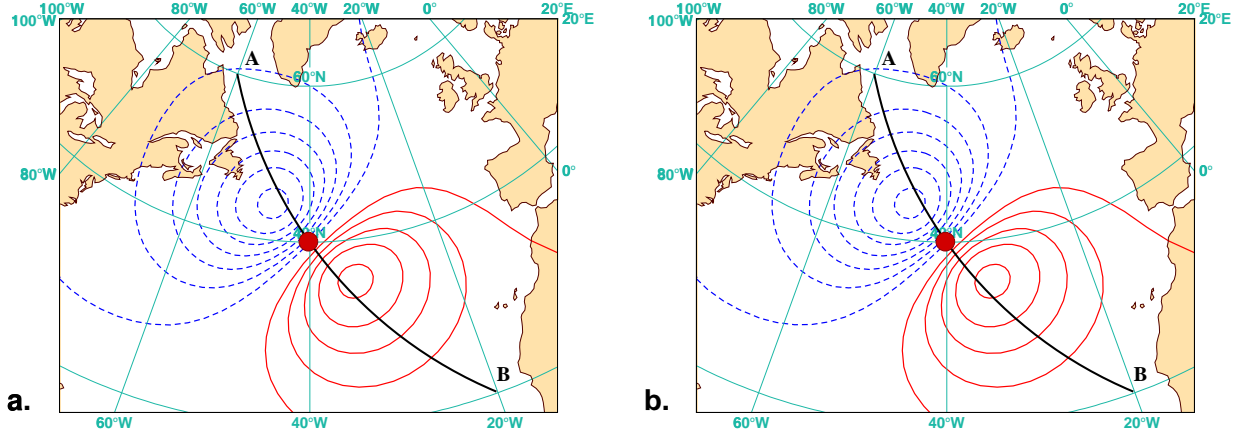


FIG. 3.8: *Fonction courant des incréments d'analyse  $\delta\mathbf{x}^a$  à 586 hPa générés par l'assimilation d'une observation simulée de vent (cf. tableau 3.2) et placée au point 40° N-40° O.*

(a.) *incrément issu du 3D-Var.*

(b.) *incrément issu du BLUE.*

*Les maxima de ces incréments sont de environ 42000  $m^2 \cdot s^{-1}$ , les minima de environ  $-58500 m^2 \cdot s^{-1}$  et les isolignes choisies marquent un intervalle de  $8000 m^2 \cdot s^{-1}$ . L'arc A-B donne l'axe des coupes verticales des figures (3.11-a.) et (3.11-b.).*

L'angle entre les axes de ces vecteurs et de l'incrément traduit le taux de projection de ces vecteurs sur  $\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}$  dans le calcul de  $\delta\mathbf{x}^a(t_i)$ .

Par ailleurs, on rappelle que selon la formulation du BLUE, et le calcul de  $\mathbf{A}$  dans notre approche, l'incrément d'analyse s'écrit :

$$\delta\mathbf{x}^a = (\mathbf{B}\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}) - (\mathbf{V}\mathbf{V}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}) \quad (3.26)$$

Le calcul de  $\mathbf{V}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}$  donne les deux coefficients suivants :

$\alpha_i$ (cf. éq. 3.12)	valeur numérique de $\alpha_i$	max. de force de vent de $v_i$
$\alpha_1 = \langle v_1; \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d} \rangle$	$0.30418978744509 \times 10^{-1}$	$5.4 \times 10^{-4} m \cdot s^{-1}$
$\alpha_2 = \langle v_2; \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d} \rangle$	$-0.58749232938063 \times 10^{-1}$	$1.3 \times 10^{-3} m \cdot s^{-1}$

On utilise ces coefficients  $\alpha_i$  pour combiner les vecteurs  $v_i$  et construire la figure (3.10-a.) :  $\mathbf{V}\mathbf{V}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d} = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2$ . On peut remarquer que l'innovation  $\mathbf{d}$  se projette plus sur le vecteur  $v_2$  que sur le vecteur  $v_1$ , ce qui se traduit par un incrément d'analyse plus proche de  $v_2$  que de  $v_1$ . Sur la figure (3.10), l'axe C-D positionne les extrema de fonction courant de l'incrément  $\delta\mathbf{x}^a$ . Le vecteur  $\mathbf{V}\mathbf{V}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}$  est légèrement décalé par rapport à cet axe.

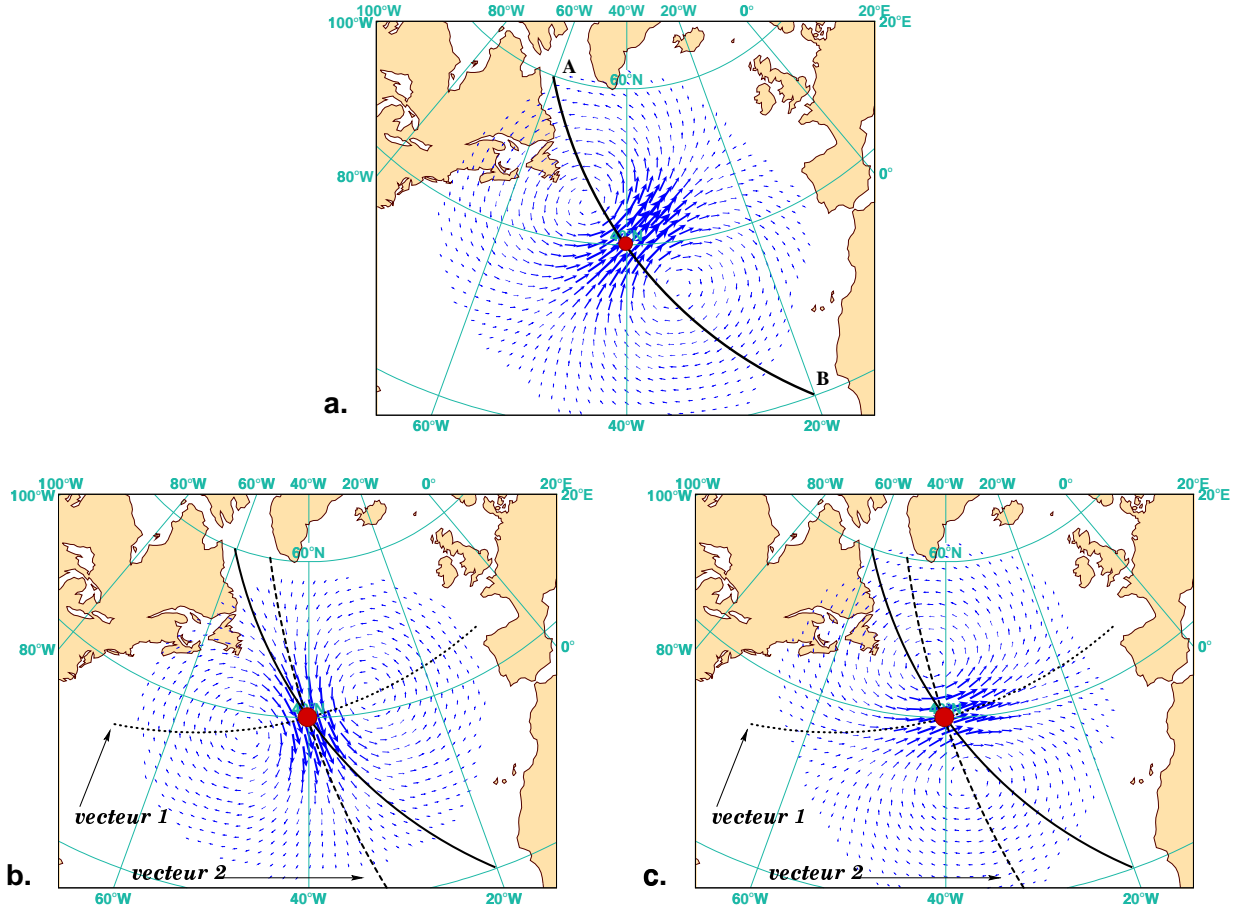


FIG. 3.9: (a.) Champ de vent de l'incrément d'analyse  $\delta \mathbf{x}^a$  à 586 hPa généré par une observation simulée de vent (cf. tableau 3.2) et placée au point  $40^\circ \text{N}$ - $40^\circ \text{O}$ . Le vent maximum atteint  $0.15 \text{ m.s}^{-1}$  en ce point. L'arc **A-B** donne l'axe des extrêmes de la fonction courant pour  $\delta \mathbf{x}^a$  (cf. figure 3.8). (b.) Premier vecteur de mise à jour; maximum de force de vent:  $5.4 \times 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ . (c.) Second vecteur de mise à jour; maximum de force de vent:  $1.3 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ . L'axe en pointillé, respectivement en tirets, souligne l'axe des extrema de fonction courant correspondant au premier, respectivement second, vecteur de mise à jour.

La figure (3.10-b.) montre le premier membre de l'équation (3.26), c'est-à-dire la projection de **B** sur  $(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})$ . Ce vecteur est le symétrique de  $\mathbf{V} \mathbf{V}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}$  par rapport à l'axe **C-D** car la différence entre ces deux termes de l'équation (3.26) rétablit l'axe des extrema de la fonction courant résultante avec **C-D**.

### Effet des vecteurs de *mise à jour* en terme de covariances

Il est aussi intéressant d'illustrer toute la variété des influences inter et intra-paramètres contenues dans les vecteurs de *mise à jour* et donc dans **A**, puisqu'elles vont avoir un effet important dans le calcul de la sensibilité aux observations. Comme nous avons montré que l'incrément d'analyse résulte d'une combinaison linéaire des deux vecteurs de *mise à jour* de cette expérience, l'examen de cet incrément nous permet d'avoir une vue synthétique de



la combinaison de ces deux vecteurs. Ainsi, la structure de l'incrément d'analyse illustre les relations de *balances* qui existent dans  $\mathbf{B}$  (donc dans  $\mathbf{A}$  et l'adjoint de l'opérateur d'assimilation) et qui interviennent dans le calcul de sensibilité aux observations. Il est préférable d'identifier ces relations avec ce cas simulé encore simple.

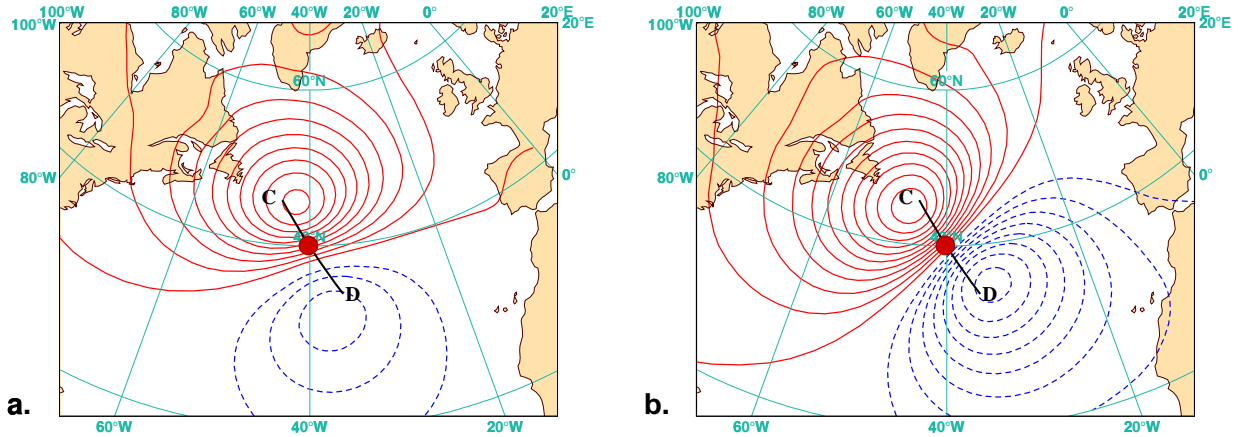


FIG. 3.10: (a.) Fonction courant à 586 hPa du champ  $\mathbf{V}\mathbf{V}^T\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{d}$  (update ou mise à jour). (b.) Fonction courant à 586 hPa du champ  $\mathbf{B}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{d}$ . Les isolignes sont respectivement de  $4000.0 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  (a.) et de  $8000.0 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  (b.). L'arc C-D positionne les extrema de la fonction courant de l'incrément.

La tendance à l'équilibre donnée par les *balances* génère un mouvement contraire de part et d'autre de la zone d'influence maximale de l'observation de vent, générant un mouvement anticyclonique au nord-ouest et un mouvement cyclonique au sud-est. Ceci peut être interprété en terme de covariances et se traduit par une corrélation négative entre des erreurs de vent, au delà d'une certaine distance. Un tel diagnostic apparaît clairement dans les figures (3.11).

Les figures (3.11) présentent les composantes zonale (figure 3.11-a.) et méridienne (figure 3.11-b.) de l'incrément dans une coupe verticale N-O  $\rightarrow$  S-E (donnée par l'arc A-B sur la figure 3.9-a.). Dans ce mode de représentation, les covariances négatives (en contours de tirets) apparaissent maximales à une distance d'environ 1400 km de la verticale de l'observation de vent. Ce qui fait que la corrélation est nulle à environ 700 km.

On notera par ailleurs que les extrema des covariances ne se situent pas tous au même niveau vertical: le maximum des covariances négatives se situe plus haut que le point d'observation (maximum de corrélation positive).

Ainsi une observation de vent pourra avoir une influence négative en terme de sensibilité sur une autre observation de vent, si celle-ci se situe à distance et altitude relative adéquate. On imagine combien la complexification du système d'observation rendra difficile l'interprétation des champs issus du calcul de la sensibilité aux observations. L'influence des fonctions de structure contenues dans  $\mathbf{A}$  risque d'être radicale lorsqu'on étudiera la sensibilité à un

réseau d'observation diversifié en matière de paramètres observés et à la répartition spatiale complexe.

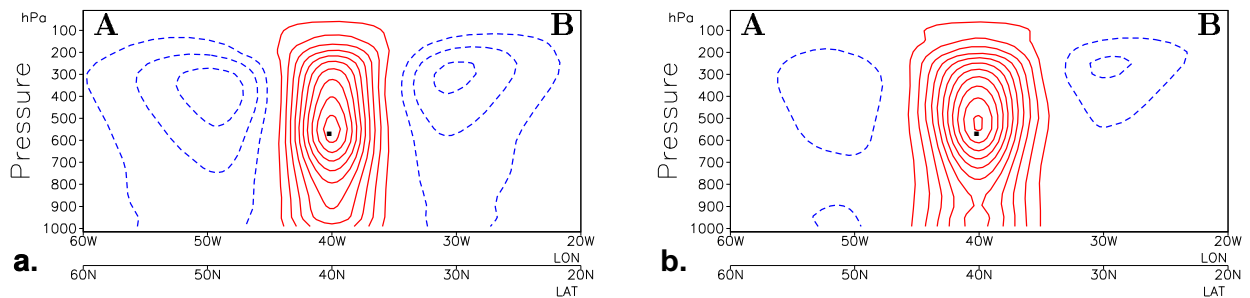


FIG. 3.11: Coupes verticales selon l'axe A-B de la figure (3.9-a.) de l'incrément d'analyse  $\delta\mathbf{x}^a$  en vent zonal (a.) et en vent méridien (b.), généré par une observation de vent qui génère une innovation orientée sud-ouest (le vecteur vent observé traverse le plan de la figure pour s'éloigner du lecteur). Les contours sont de  $0.01 \text{ m.s}^{-1}$ . Les contours continus représentent les composantes positives du vent, les tirets les composantes négatives pour lesquelles le vent s'approche du lecteur.

L'influence des statistiques d'erreur du vent sur la température est illustrée dans la figure (3.12).

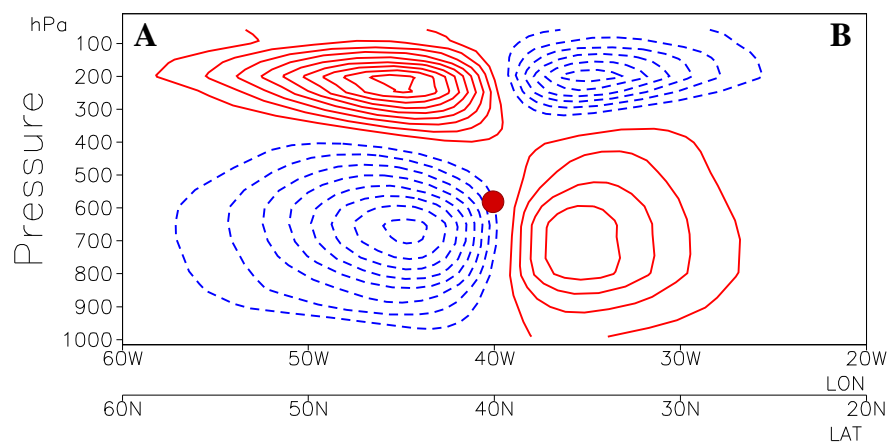


FIG. 3.12: Coupe verticale le long de l'arc A-B de la figure (3.8) de l'incrément d'analyse  $\delta\mathbf{x}^a$  en température généré par une observation de vent (point) qui génère une innovation orientée sud-ouest. Les contours continus sont de  $0.002 \text{ K}$ . Les tirets représentent les valeurs négatives.

Cette figure (3.12) montre l'incrément d'analyse  $\delta\mathbf{x}^a$  en température qui illustre les covariances selon un plan de coupe vertical identique à celui utilisé dans la figure (3.11) précédente. Il n'apparaît aucune covariance entre les erreurs commises sur les paramètres du vent avec celles sur le paramètre de température au point d'observation même. Les maxima se situent à une distance équivalente à la distance de décorrélation observée dans le cas des paramètres de vent, c'est-à-dire  $700 \text{ km}$  (cf. figures 3.11). La structure est quadripolaire au sens où elle change de signe à la fois par rapport au plan vertical contenant le vecteur de l'observation de

vent, mais aussi sur la verticale, au sens où deux extrema d'influence apparaissent à 200 *hPa* et à 700 *hPa* et avec des signes opposés (cf. figure 3.12).

Enfin, on notera l'influence de l'anisotropie entre longitude et latitude puisque les amplitudes de ces structures entre partie Nord (gauche de la figure) et dans la partie Sud (droite de la figure 3.12) ne sont pas identiques.

### Conclusion sur les fonctions de structure et vecteurs de *mise à jour*

Dans cette partie nous avons illustré la validation, à la fois en amplitude et en morphologie, des vecteurs de *mise à jour* dans des cas d'observation unique.

La matrice carrée  $\mathbf{V}\mathbf{V}^T$  caractérise la modification des fonctions de structure de  $\mathbf{B}$  pour générer les nouvelles covariances que doit décrire  $\mathbf{A}$ . Nous avons illustré la présence des fonctions de structure dans les vecteurs de *mise à jour*, aussi bien analytiquement dans le cas d'une observation scalaire unique (température) qu'au travers de la vérification de la formulation du BLUE choisie pour écrire les processus d'assimilation (cas d'une observation de vent). Dans les deux cas, une grande précision sur les résultats testés a pu être obtenue. Le calcul des vecteurs  $v_i$  (*mise à jour*) qui forment les colonnes de  $\mathbf{V}$  est ainsi validé.

De plus, on a aussi pu mettre en évidence, grâce à ces situations d'observation extrêmement simples, les relations complexes de covariances et de balance géostrophique entre les statistiques d'erreur sur les paramètres du modèle. Ces fonctions de structure sont contenues dans l'opérateur  $\mathbf{A}$  qui est la clef de voûte du calcul de la sensibilité aux observations.

Enfin, il est naturel de se demander si les bons résultats obtenus ici, avec peu d'observations, sont toujours vérifiés lorsque les observations sont plus nombreuses. C'est ce que nous examinons dans la partie suivante. Nous ne nous intéressons alors plus qu'à la description de l'opérateur  $\mathbf{A}$  dans direction instable du gradient  $\nabla_{x^a}\mathcal{J}$ , utilisé dans le calcul de la sensibilité aux observations  $\nabla_{y^o}\mathcal{J}$ .

#### 3.4.2 Validation de $\mathbf{A}$

Jusqu'ici, la validation des vecteurs de *mise à jour* a été basée sur des expériences mono-observation. Cependant nous souhaitons utiliser l'approche de la sensibilité aux observations dans le cadre du réseau d'observations météorologiques opérationnelles. Ceci implique un nombre d'observations élevé. Nous avons vu que pour un faible nombre d'observations, l'algorithme d'assimilation génère autant de vecteurs de *mise à jour* que de données assimilées. On est alors en droit de se demander combien de tels vecteurs sont nécessaires pour obtenir une estimation de  $\mathbf{A}$  suffisamment précise dans le cas d'un réseau d'observation comportant plusieurs milliers de mesures très variées. Il n'est cependant pas envisageable d'utiliser plusieurs milliers de vecteurs de *mise à jour*. La question porte donc sur le nombre de vecteurs par rapport au nombre d'observations traitées dans le processus d'assimilation. Ce nombre de vecteurs a une influence directe sur le coût de la méthode, puisque chaque vecteur additionnel signifie des itérations supplémentaires de l'algorithme de minimisation du 3D-Var, ainsi qu'un coût de stockage de cette information.

Dans cette partie 3.4.2, nous continuerons à nous focaliser sur le calcul de  $\mathbf{c} = \mathbf{A}\nabla_{\mathbf{x}_a}\mathcal{J}$  qui nous permet de valider  $\mathbf{A}$  dans la direction particulière de la sensibilité aux conditions initiales ( $\nabla_{\mathbf{x}_a}\mathcal{J}$ ), car seul le vecteur  $\mathbf{c}$  est indispensable. La validation du calcul de la sensibilité aux observations dans son ensemble fera l'objet de la partie suivante.

### 3.4.2-a. Restriction du domaine observé

Le très grand nombre d'observations apparaît comme un obstacle intuitif à la qualité de  $\mathbf{A}$ . En effet, nous sommes limités en temps de calcul et en capacité de rétention de l'information et par ailleurs, plus la mise à jour de  $\mathbf{B}$  est importante pour estimer  $\mathbf{A}$ , moins les hypothèses nécessaires à l'application de la formule de **Shermann-Morrisson-Woodbury** (Hager, 1989) sont vérifiées (cf. annexe A.1).

D'autre part, les directions le long desquelles est estimée la Hessienne de la fonction objective du variationnel ( $\nabla\nabla J$ , dont on déduit les vecteurs de *mise à jour*), correspondent de façon prépondérante aux observations qui ont un très fort poids dans cette fonction (fort écart des observations et de l'ébauche ou très grande précision de mesure, c'est-à-dire un faible  $\sigma_o$ ). Ces observations peuvent ainsi fortement contribuer aux directions de minimisation de l'algorithme. En conséquence, leur effet sera sélectionné par le processus qui génère les facteurs propres de la Hessienne et les vecteurs de *mise à jour* qui leur sont associés.

Dans les cas d'observations nombreuses, on ne peut attribuer des vecteurs de *mise à jour* à l'effet d'observations *distinctes*, comme c'est pourtant le cas dans les exemples précédents avec très peu d'observations (cf. partie 3.4.1). Ainsi, les vecteurs déterminés reflètent l'effet de *groupements* d'observations qui contribuent fortement aux directions de *descente* de l'algorithme de minimisation (par le  $\nabla J_o$  du variationnel).

Or, les vecteurs situés aux antipodes de la zone sensible sont inutiles pour le calcul de  $\mathbf{c}$ , puisque la projection de ces vecteurs sur  $\nabla_{\mathbf{x}_a}\mathcal{J}$  est très faible, voire nulle. Ainsi, en l'absence d'observations dans ces régions très éloignées, de tels vecteurs ne seront pas générés par l'algorithme.

Compte tenu des distances de corrélation des erreurs et du fait que nous travaillons avec un système d'assimilation 3D-Var non cyclé entre les cas FASTEX, les observations lointaines n'ont aucune influence sur l'analyse dans la zone sensible. Il semble donc inutile de conserver de telles observations parmi les données utilisées pour déterminer  $\mathbf{c}$ . En conséquence, nous avons réduit le domaine observé, à un domaine appelé *domaine d'étude*. Celui-ci s'étend entre les limites de 110°Ouest, 10°Est, 20°Nord et 70°Nord.

La réduction géographique du réseau conventionnel à ce *domaine d'étude* implique une réduction du volume d'observation d'au moins 75%. La composition des réseaux ainsi modifiés est documentée pour 3 cas de FASTEX dans le tableau (3.3) ci-après. Il faut noter par ailleurs que les données des satellites défilants de la NOAA (données TOVS) ne sont pas représentées dans le tableau (3.3). En effet, ces données n'étaient pas disponibles dans le système ARPEGE au moment de l'expérience FASTEX.

Date	Réseau	Nombre d'observations						
		SYNOP*	AIREP*	SATOB*	DRIBU*	TEMP*	PILOT*	Total
97021718	Ta	0	0	0	0	20	0	20
97021718	Cv+Ta (loc)	745	1731	567	80	20	12	3155
97021718	Cv+Ta	5032	4299	5203	411	36	170	15151
97021800	Ta	0	0	0	0	13	0	13
97021800	Cv+Ta (loc)	628	1709	544	72	120	26	3099
97021800	Cv+Ta	4484	4865	5508	456	583	207	16103
97022212	Ta	0	0	0	0	25	0	25
97022212	Cv+Ta (loc)	789	982	598	81	125	25	2600
97022212	Cv+Ta	5371	3089	3460	443	548	209	13120

TAB. 3.3: *Tableau de dénombrement des observations pour trois cas de FASTEX. Cv signifie réseau conventionnel, Ta signifie réseau ciblé. loc précise que les observations sont contenues dans le domaine d'étude. Les acronymes signalés d'un astérisque (\*) trouvent leur signification dans l'annexe D.*

Cette réduction drastique du nombre d'observations permet d'alléger notablement la méthode et l'algorithme sélectionne ainsi beaucoup plus de vecteurs de *mise à jour* dans le domaine d'étude.

Des tests ont montré que cette réduction du domaine a peu d'influence sur l'analyse dans les zones sensibles et garantit une bonne estimation de  $\mathbf{c}$ .

### 3.4.2-b. Convergence de $\mathbf{A}$

Nous avons vu que l'algorithme de détermination des vecteurs de *mise à jour* utilise les directions données par le gradient de la fonction objective ( $\nabla J$ ), aux itérations successives de la minimisation. L'algorithme du gradient conjugué orthogonalise chaque nouvelle direction de *descente*, vis-à-vis du sous-espace décrit dans les itérations précédentes, afin de "visiter" le plus large sous-espace de directions possibles. Le nombre d'itérations étant limité, ce sous-espace ne représente qu'une petite partie de l'espace des phases dont la dimension atteint  $10^6$ . Mais c'est dans ce sous-espace qu'est contenue l'estimation de la matrice de *mise à jour*  $\mathbf{V}\mathbf{V}^T$  et c'est donc dans ce sous-espace que l'estimation de  $\mathbf{A}$  est de la meilleure qualité.

Il est primordial de savoir si l'estimation de  $\mathbf{A}$  dans la direction de la sensibilité aux conditions initiales ( $\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$ ) est de bonne qualité. Pour le contrôler, on se propose de mesurer la variance des erreurs d'analyse dans cette direction. Dans ce but, on calcule la quantité suivante:  $(\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J})^T \cdot \mathbf{A} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$ . Le produit scalaire de  $\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$  et  $\mathbf{c}$  illustre la variance des variations ( $\delta \mathcal{J}$ ) de la fonction coût  $\mathcal{J}$ , liées aux erreurs dans les champs analysés. On note  $Var(\delta \mathcal{J})$  cette quantité.

Cette *mesure* met en évidence la réduction de la variance d'un aspect de la prévision,

provoqué par l'assimilation des observations. En effet, sans observations,  $\mathbf{A}$  est égale à  $\mathbf{B}$ . La borne supérieure de la variance de  $Var(\delta\mathcal{J})$  est atteinte dans ce cas. Mais plus il y a d'observations, plus  $\mathbf{A}$  diffère de  $\mathbf{B}$  et plus  $Var(\delta\mathcal{J})$  diminue. Ainsi pour estimer la qualité de  $\mathbf{A}$ , on calcule  $Var(\delta\mathcal{J})$  au fur et à mesure que les vecteurs de *mise à jour* sont générés par l'algorithme de minimisation. C'est pour cela que l'on parle ici de convergence de  $\mathbf{A}$ . On examine ainsi la réduction de la variance à mesure qu'augmente la dimension de la matrice de *mise à jour*, c'est à dire à mesure que s'accroît la dimension du sous-espace utilisé pour décrire cette variance. Nous désignons par  $N_A$  le nombre limite de vecteurs.

Pour que ce nombre de vecteurs soit atteint, nous avons choisi de faire itérer l'algorithme de minimisation jusqu'à une limite de 320. C'est bien plus que ce qui est spécifié pour estimer l'analyse  $\mathbf{x}^a$ , dans le cas d'un 3D-Var opérationnel (80 itérations suffisent à satisfaire un critère de convergence basé sur la réduction de la pente de fonction objective du variationnel  $J$ ). Mais ici, nous souhaitons une grande qualité de  $\mathbf{A}$  qui ne résulte pas exactement du même procédé de calcul que  $\mathbf{x}^a$ . Nous considérons ainsi en première approche que  $\mathbf{A}$  est estimée avec 320 itérations, ce qui correspond à plus de 270 vecteurs produits d'après nos expériences sur des cas de FASTEX (parfois jusqu'à 320 selon les cas).

Pour évaluer la qualité de l'opérateur  $\mathbf{A}$ , nous avons choisi d'étudier un taux de décroissance donné par la fonction suivante :

$$\mathfrak{R}_i = \frac{\langle \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}; (\mathbf{A}_i) \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \rangle}{\langle \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}; (\mathbf{B}) \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \rangle} \quad (3.27)$$

où  $\mathbf{A}_i$  représente l'estimation de  $\mathbf{A}$  obtenue avec  $i$  vecteurs de *mise à jour* ( $i \leq N_A$ ). La valeur maximale de  $\mathfrak{R}_i$  est 1 et correspond à  $\mathfrak{R}_0$ , c'est-à-dire au cas où aucun vecteur de *mise à jour* n'est utilisé :  $\mathbf{A}_0$  est équivalent à  $\mathbf{B}$ . On note  $\mathfrak{R}_{N_A}$ , la meilleure estimation de ce rapport, obtenue pour  $N_A$  vecteurs. En théorie l'ajout de vecteurs de *mise à jour* ne peut que faire décroître ce ratio  $\mathfrak{R}_i$ .

Par ailleurs, on définit une mesure  $\mathfrak{G}_i$  de l'apport d'information à la quantité  $Var(\delta\mathcal{J})$  par un ajout des  $j$  vecteurs additionnels à partir d'une estimation  $\mathbf{A}_i$  pour obtenir  $\mathbf{A}$  (ainsi  $j = N_A - i$ ).  $\mathfrak{G}_i$  se formule ainsi :

$$\mathfrak{G}_i = \frac{\langle \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}; \mathbf{A}_i \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \rangle - Var(\delta\mathcal{J})}{Var(\delta\mathcal{J})} \quad (3.28)$$

où  $Var(\delta\mathcal{J}) = \langle \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}; \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \rangle$  utilise la meilleure estimation que l'on ait de  $\mathbf{A}$  (avec  $N_A$  vecteurs).  $\mathfrak{G}_i$  représente donc le gain de convergence de la quantité  $Var(\delta\mathcal{J})$  par l'ajout des derniers vecteurs (entre le rang  $i$  et le rang  $N_A$ ).

La figure (3.13) montre la variation de  $\mathfrak{R}_i$  avec l'augmentation de la dimension du sous-espace de *mise à jour*. On montre  $\mathfrak{R}_i$  pour 5 expériences pour lesquelles le jeu d'observations assimilées est identique et est limité au *domaine d'étude*. La seule différence existant entre les 5 expériences est le critère d'arrêt de l'algorithme de minimisation. Il s'agit du nombre maximum d'itérations et donc du nombre maximum de vecteurs de *mise à jour*. Entre ces 5 cas, on peut ainsi étudier, d'une part comment évolue  $\mathfrak{R}_i$  et d'autre part, l'asymptote lorsque  $i$  tend vers  $N_A$ .

Pour ces expériences nous avons utilisé en plus des observations conventionnelles, les observations du premier vol du GIV de la POI17 (Vol du 17 février 1997 à 18h TU). Les cibles ont été calculées pour améliorer la prévision pour le 19 février à 12h TU (prévision à 42 heures d'échéance). Nous avons utilisé une fonction coût  $\mathcal{J}$  diagnostique basée sur l'énergie de l'erreur de prévision sur une région d'intérêt qui s'étend au large de l'Irlande (30°Ouest, 0°Est, 40°Nord et 65°Nord). L'erreur de prévision est calculée par comparaison avec l'analyse opérationnelle de l'époque, valide pour le 19 février à 12h TU, l'énergie totale est calculée selon la formulation (2.11).

L'examen d'ensemble de cette figure (3.13) montre que la variance dans la direction instable ( $\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$ ) présente une très forte décroissance avec les premiers vecteurs. Ces premiers vecteurs sélectionnés qui font baisser le plus fortement la variance, correspondent à l'effet des observations qui ont une influence majeure sur l'assimilation : elles contribuent fortement au gradient de la fonction objective du variationnel et contribuent alors beaucoup aux premiers modes propres de la Hessienne  $\nabla \nabla J$ .

On note ensuite que la courbe se stabilise assez vite et qu'apparaît une limite asymptotique de la valeur de  $\mathfrak{R}_i$ . Ceci nous indique donc qu'il n'est pas nécessaire d'avoir autant de vecteurs de *mise à jour* que d'observations dans le réseau pour obtenir une estimation de  $\mathbf{c}$  ( $\mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$ ) avec une précision acceptable (320 itérations et autant de vecteurs de *mise à jour* pour 3155 observations selon le tableau 3.3). Ainsi, à partir d'un certain rang de la matrice de *mise à jour*, l'accroissement de ce rang (ou du nombre de vecteurs de *mise à jour*) ne semble pas apporter de gain notable dans la précision de  $\mathfrak{R}_i$  et donc de  $\mathbf{A}$  dans la direction de  $\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$ .

On remarque sur la figure (3.13) que les 5 courbes se superposent aisément. Cependant, pour un nombre de vecteurs de *mise à jour* donné, l'estimation de  $\mathbf{c}$  est d'autant meilleure (et  $\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$ ;  $\mathbf{A}_i \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$  est basse) que l'expérience a effectué un nombre d'itérations élevé. C'est pour les dernières itérations d'une expérience donnée que l'on constate le plus de différences entre l'estimation de  $\mathfrak{R}_i$  dans cette expérience et les estimations de  $\mathfrak{R}_i$  des expériences dont le nombre d'itérations est plus élevé.

Cette légère différence se détecte par l'écart existant entre les courbes des 5 expériences pour les tous derniers vecteurs de chacune, alors que chaque expérience rencontre son critère d'arrêt respectif. Par exemple, au rang 209, les vecteurs 150 à 209 de l'expérience 3 n'ont pas autant convergé que les mêmes vecteurs pour l'expérience 4.

Enfin, d'un point de vue pratique, on note que la convergence a atteint un taux très satisfaisant avec environ 270 vecteurs. Quelques exemples numériques sont donnés dans les tableaux (3.4) et (3.5).

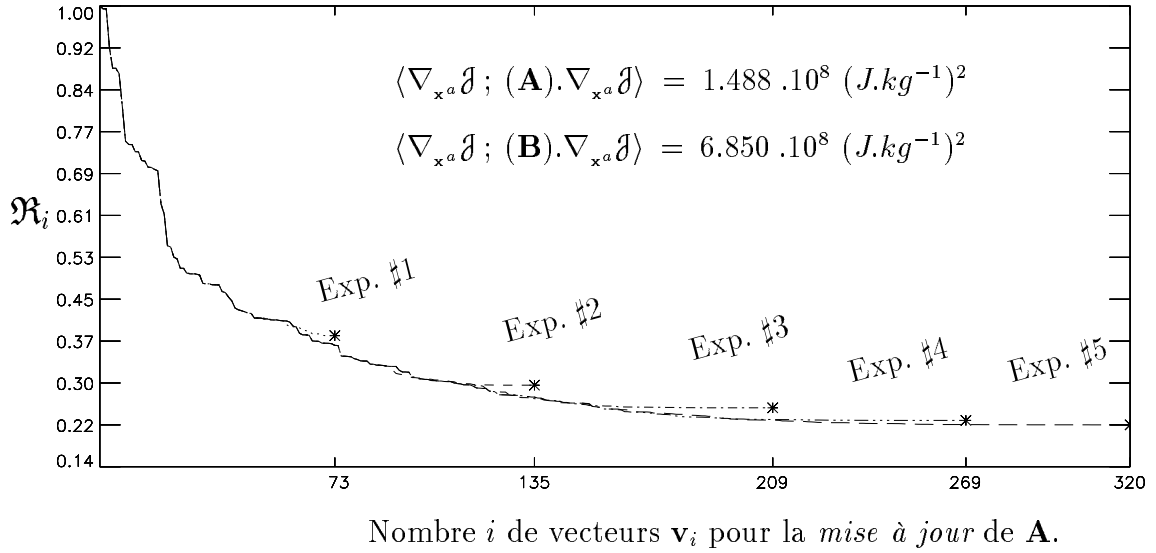


FIG. 3.13: Effet sur le rapport  $\mathfrak{R}_i$ , de l'accroissement du rang  $i$  de  $\mathbf{V}\mathbf{V}^T$  (augmentation du nombre de colonnes  $\mathbf{v}_i$  dans la matrice  $\mathbf{V}$ ).  $\mathcal{J}$  est l'énergie totale de l'erreur de prévision sur la région d'intérêt définie dans le texte. Cas du 17 février 1997 à 18h TU. Ici,  $\mathfrak{R}_{N_A} = \mathfrak{R}_{320}$  pour l'expérience 5.

Le tableau (3.4) donne les valeurs initiales (sans vecteurs de *mise à jour*) et convergées (plus de 300 vecteurs) de  $Var(\delta\mathcal{J})$  pour deux dates (POI17, même vol de ciblage que dans le cas de la figure (3.13) et vol du LearJet de la même POI, optimisé pour la même prévision d'intérêt, le 19 février à 12h TU) et pour deux fonctions coût différentes. La fonction notée "Énergie" correspond à celle utilisée dans la figure (3.13), la seconde correspond à la mesure de l'énstrophie de basse couche (cf. équation 2.12).

Date	Fonction coût.	$\langle \nabla_{x^a} \mathcal{J}; (\mathbf{B}) \nabla_{x^a} \mathcal{J} \rangle$	$\langle \nabla_{x^a} \mathcal{J}; (\mathbf{A}) \nabla_{x^a} \mathcal{J} \rangle$
97-02-17-18	Énstrophie ( $s^{-4}$ )	$0.5514 \times 10^{-11}$	$0.1072 \times 10^{-11}$
97-02-17-18	Énergie ( $J^2.kg^{-2}$ )	$0.6850 \times 10^{+09}$	$0.1488 \times 10^{+09}$
97-02-18-00	Énstrophie ( $s^{-4}$ )	$0.4067 \times 10^{-11}$	$0.1102 \times 10^{-11}$
97-02-18-00	Énergie ( $J^2.kg^{-2}$ )	$0.5510 \times 10^{+09}$	$0.1209 \times 10^{+09}$

TAB. 3.4:  $Var(\delta\mathcal{J})$  ou projection de  $\nabla_{x^a} \mathcal{J}$  sur  $\mathbf{c}$  pour deux cas de FASTEX et pour deux fonctions coût différentes.

On note, à l'examen du tableau (3.4), que quelle que soit la fonction coût choisie, la valeur de  $Var(\delta\mathcal{J})$  (4<sup>e</sup> colonne), obtenue avec un maximum de vecteurs, représente 20% environ de la valeur obtenue avec  $\mathbf{B}$  (ou sans *mise à jour* de cette matrice). Les structures instables ( $\nabla_{x^a} \mathcal{J}$ ) sont assez proches entre énstrophie et énergie (non montré) ce qui est compatible avec ce résultat. La qualité de  $\mathbf{c}$  ne semble pas affectée par les choix de la fonction coût  $\mathcal{J}$  que nous avons testés.

Le tableau (3.5) illustre plus précisément l'évolution de  $\mathfrak{R}_i$  pour quelques rangs  $i_k$  fixés (entre 0 et  $N_A$ ) de la *mise à jour* de  $\mathbf{A}$  (nombre de vecteurs de *mise à jour* donné en troisième colonne) où  $k$  est le numéro de l'expérience correspondante (cf. figure 3.13). Ce tableau



documente le “% de décroissance de  $\mathfrak{R}_i$ ” donné par

$$\frac{\mathfrak{R}_{i_{k-1}} - \mathfrak{R}_{i_k}}{\mathfrak{R}_0} \times 100$$

dans sa quatrième colonne. La cinquième colonne donne les valeurs de “gain de convergence de  $\mathfrak{G}_i$ ”, c’est-à-dire la différence  $\mathfrak{G}_{i_{k-1}} - \mathfrak{G}_{i_k}$ , pour le nombre de vecteurs  $i_k$  de l’expérience  $k$  donné en regard. Ainsi au terme de l’expérience numéro 4, l’estimation de la réduction de la variance par rapport à celle obtenue au terme de l’expérience 5 atteint la limite de 4% d’erreur (valeur de  $\mathfrak{G}_i$  pour le cas du 17 février à 18h TU avec l’énergie totale, cf. équation 3.28), ce qui correspond à moins de 1% de décroissance du ratio  $\mathfrak{R}_i$  (dernier nombre de la troisième ligne et quatrième colonne du tableau 3.5).

Le “% de décroissance de  $\mathfrak{R}_i$ ” (4<sup>e</sup> colonne) illustre (quels que soient le cas et la fonction coût utilisée), le caractère asymptotique de la convergence de  $\mathfrak{R}_i$  (ou de  $Var(\delta\mathcal{J})$ ). En effet, au fur et à mesure que  $k$  augmente (et donc  $i_k$  le rang de la *mise à jour*), le % de décroissance est plus faible; tout comme le gain  $\mathfrak{G}_{i_{k-1}} - \mathfrak{G}_{i_k}$  (5<sup>e</sup> colonne). Cette différence de gain  $\mathfrak{G}_{i_{k-1}} - \mathfrak{G}_{i_k}$  donne une mesure de l’erreur commise dans l’estimation de  $Var(\delta\mathcal{J})$  entre l’expérience  $k - 1$  et l’expérience  $k$ . Si nous plaçons une barre d’erreur acceptable à 10%, il faut donc que le nombre de vecteurs entrant dans la formulation de  $\mathbf{A}$  soit fixé entre 270 ( $k = 4$ ) et 320 ( $k = 5$ ).

Il faut cependant souligner que ces résultats correspondent à des expériences d’assimilation sur un réseau dit secondaire (06h et 18h TU, 00h et 12h TU étant les réseaux principaux) qui comporte moins d’observations conventionnelles qu’un réseau principal (cf. tableau (3.3) pour illustration). Ainsi le nombre d’observations conventionnelles de bonne qualité, telles que celles des radiosondages côtiers des USA, sont peu nombreuses à 18h TU. Il faut donc moduler les résultats de la figure (3.13) lorsqu’on étudie la convergence de  $\mathbf{A}$  dans un cas où les observations conventionnelles sont plus nombreuses.

C’est le cas de l’expérience du 18 février à 00h TU, documentée dans le dernier bloc du tableau (3.5). C’est un vol du Learjet de la POI17, contemporain d’un réseau principal. Dans ce cas, l’ajout de 50 vecteurs supplémentaires (270 dans l’expérience 4, 320 dans l’expérience 5) permet toujours la décroissance de 2.12% de  $\mathfrak{R}$  qui correspondent encore à un gain  $\mathfrak{G}$  d’environ 10% sur l’estimation de la variance  $Var(\delta\mathcal{J})$ .

### Conclusion à propos de la convergence de $\mathbf{A}$

À l’issue de ces différentes expériences, nous avons donc conclu que la convergence de la quantité  $Var(\delta\mathcal{J})$  et donc de  $\mathbf{A}$  dans la direction sensible ( $\nabla_{\mathbf{x}_a}\mathcal{J}$ ) était tout à fait satisfaisante avec 250 vecteurs de *mise à jour* dans le cas des réseaux secondaires. Dans le cas des réseaux d’observations principaux, il nous apparaît plus sage de conserver un nombre de vecteurs obtenus avec les 320 itérations de l’algorithme de calcul des vecteurs.

Ainsi, dans le cadre de l’étude diagnostique que nous menons sur les cas de ciblage de FASTEX, nous considérons comme utile de forcer l’algorithme d’assimilation 3D-Var à itérer jusqu’à cette limite de 320 afin de générer un maximum de vecteurs. En général, ceci garantit que plus de 270 vecteurs de *mise à jour* (limite des 10% d’erreur) ont convergé. Ce choix

est appliqué en plus de la réduction spatiale du domaine observé comme nous l'avons illustré auparavant. De plus, cette qualité apparaît comme peu dépendante du choix de la fonction coût.

Date	Fonction coût $\mathcal{J}$	Nombre de vecteurs ( $i_k$ )	% de décroissance de $\mathfrak{R} \left( \frac{\mathfrak{R}_{i_{k-1}} - \mathfrak{R}_{i_k}}{\mathfrak{R}_0} \times 100 \right)$	Gain de convergence vers l'estimation de $Var(\delta\mathcal{J})$ : $\mathfrak{G}_{i_{k-1}} - \mathfrak{G}_{i_k}$
97-02-17-18	Enstrophie	0 $k = 0$	0.	0.
		73 $k = 1$	63.13	337.40
		135 $k = 2$	9.23	49.37
		209 $k = 3$	4.84	25.90
		269 $k = 4$	2.59	13.88
		320 $k = 5$	1.47	7.86
97-02-17-18	Énergie	0	0.	0.
		73	63.32	301.93
		135	8.68	41.39
		209	4.01	19.16
		269	2.24	10.68
		320	0.75	3.61
97-02-18-00	Enstrophie	0	0.	0.
		50	46.24	154.63
		108	12.78	42.74
		174	4.67	15.63
		261	3.95	13.21
		319	2.43	8.14
97-02-18-00	Énergie	0	0.	0.
		50	59.65	271.26
		108	9.63	43.80
		174	3.72	16.94
		261	2.87	13.06
		319	2.12	9.64

TAB. 3.5: Étude de la convergence de  $\mathbf{A}$  projeté dans le sous-espace instable décrit par  $\nabla_{x^a} \mathcal{J}$ , en fonction de la dimension de la mise à jour de  $\mathbf{A}$ . Pour chaque cas (une date et une fonction coût), on a 6 expériences ( $k = 0$  à  $k = 5$ ) pour lesquelles on calcule un pourcentage de décroissance de  $\mathfrak{R}_{i_k}$  (quatrième colonne) ainsi qu'un gain de convergence (cinquième colonne).

### 3.4.2-c. Influence des valeurs observées sur l'estimation de $\mathbf{A}$

La formulation théorique de l'inverse de la Hessienne de la fonction objective du variationnel ( $\nabla \nabla J^{-1}$ , cf. équation 2.92), à partir de laquelle on estime l'opérateur  $\mathbf{A}$ , montre que

celle-ci ne dépend que du déploiement géographique des observations ( $\mathbf{H}$ ) ainsi que des statistiques qui leurs sont associées ( $\mathbf{R}$ ) et des statistiques des erreurs d'ébauche ( $\mathbf{B}$ ) et de l'ébauche elle-même au travers de la linéarisation des opérateurs d'observation. Ainsi, une variation des valeurs mesurées au point d'observation ne doit pas avoir d'influence sur l'estimation de cet opérateur  $\mathbf{A}$ .

C'est ce que l'on se propose de vérifier en montrant que l'estimation du vecteur  $\mathbf{c}$  est stable malgré une variation des valeurs observées.

La figure (3.14) présente l'erreur relative effectuée sur l'estimation de  $\mathbf{A}$  dans la direction instable donnée par  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ . Cette erreur est calculée pour différentes expériences dans lesquelles la mesure des observations n'est pas constante. Elle est estimée par la formule suivante :

$$100. \times \frac{\mathfrak{R}_{N_0}^0 - \mathfrak{R}_{N_k}^k}{\mathfrak{R}_{N_0}^0} \quad (3.29)$$

où l'exposant  $^0$  désigne l'expérience de référence et  $^k$  désigne l'expérience  $k$  correspondante. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{N_0}^0 &= \frac{\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}_0^T \mathbf{A}_{N_0} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}_0}{\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}_0^T \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}_0} \\ &\quad \text{et} \\ \mathfrak{R}_{N_k}^k &= \frac{\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}_0^T \mathbf{A}_{N_k} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}_0}{\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}_0^T \mathbf{B} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}_0} \end{aligned}$$

où seule la spécification de  $\mathbf{A}$  varie par rapport au calcul de  $\mathfrak{R}_{N_0}^0$ .

Par ailleurs, le nombre des vecteurs de *mise à jour* dans la formulation de  $\mathbf{A}$  est constant entre les expériences. On travaille ici avec une observation synthétique de vent et une de température, le nombre de vecteurs de *mise à jour* est donc de 3.  $\mathbf{A}_{N_k}$  est l'estimation de  $\mathbf{A}$  avec les  $N_k = 3$  vecteurs de *mise à jour* de l'expérience  $k$ .

L'axe des abscisses de la figure (3.14) donne le coefficient utilisé pour perturber la valeur des observations selon la direction donnée par la sensibilité à ces mêmes observations pour l'expérience témoin. Par exemple, pour une observation de température, l'extrémité de l'axe des abscisses correspond à une perturbation de presque  $3K$ , ce qui représente plus de 2 fois la valeur de l'écart type d'erreur d'observation qui y est associée. On se place ainsi dans des conditions d'écart à l'ébauche équivalentes au seuil critique de rejet de l'observation par l'étape dite d'écémage (cf. figure 3.1) dans le processus direct d'assimilation.

Sur la figure (3.14), les variations de l'erreur relative ne semblent pas obéir à un comportement particulier qui puisse être fonction de la valeur des observations. La courbe montre un comportement aléatoire en ce qui concerne la précision au delà du septième chiffre significatif. L'erreur relative ne dépasse pas  $2.0 \times 10^{-4}\%$ , ce qui représente une excellente précision, gage de la relative indépendance de l'algorithme d'estimation de vecteurs de *mise à jour* vis-à-vis des valeurs observées.

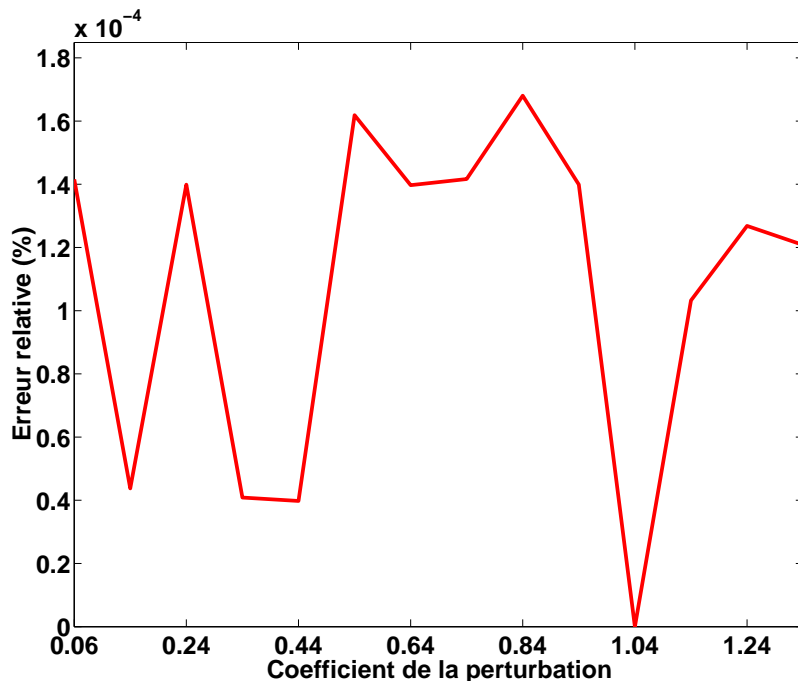


FIG. 3.14: Stabilité de l'estimation de  $\mathfrak{R}_{NA}$  à la variation des mesures associées à  $\mathbf{y}^o$ .

#### 3.4.2-d. Influence des erreurs d'observation

Symétriquement, nous avons testé l'effet de la variation des écarts types des erreurs d'observation sur l'estimation de l'opérateur  $\mathbf{A}$ . Pour cela, nous avons modifié les statistiques liées aux observations des vols ciblés, en divisant, soit par 2, soit par 4 les écarts types concernant les dropsondes du **G-IV**.

Nous présentons dans la figure (3.15), la décroissance de la quantité  $Var(\delta\mathcal{J}) = \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}^T \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ , pour 3 expériences, alors que  $i$  le nombre de vecteurs de *mise à jour* augmente. La première expérience sert de référence et utilise les données conventionnelles et les données de température extraites du déploiement du **G-IV** pour la POI18, le 22 février à 12h TU. Toutes les observations sont assimilées avec le 3D-Var d'ARPEGE. Les deux autres expériences utilisent les mêmes données (conventionnelles et ciblées) mais les observations ciblées sont assimilées avec des écarts-types d'erreur d'observation deux fois et quatre fois plus faibles que dans le cas de référence.

L'examen de la figure (3.15) amène aux constatations suivantes. Tout d'abord et pour un nombre  $i$  de vecteurs de *mise à jour* fixé, il y a une diminution entre les trois expériences, de la variance  $Var(\delta\mathcal{J})$  dans la direction spécifiée par le gradient  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}_0$  utilisée (gradient de l'expérience témoin avec des erreurs d'observation standard). Ceci est compatible avec le fait que l'assimilation de données a permis d'intégrer à l'état analysé, une information à chaque fois plus sûre en provenance des observations ciblées, lorsque l'écart type d'erreur d'observation diminue ( $\sigma_o$ ). De plus, on note que la diminution de  $Var(\delta\mathcal{J})$  entre l'expérience de référence et celles dont  $\mathbf{R}_t$  ( $\sigma_o$ ) est modifiée, n'est pas proportionnelle à la diminution de l'écart type d'erreur sur les observations ciblées. Il y a un phénomène de saturation de la baisse de  $Var(\delta\mathcal{J})$  au sens où  $\mathbf{A}$  est un compromis entre les statistiques d'erreur contenues

dans  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{R}_c$  qui ne change pas et dans  $\mathbf{R}_t$  où les variances diminuent dans ces expériences.

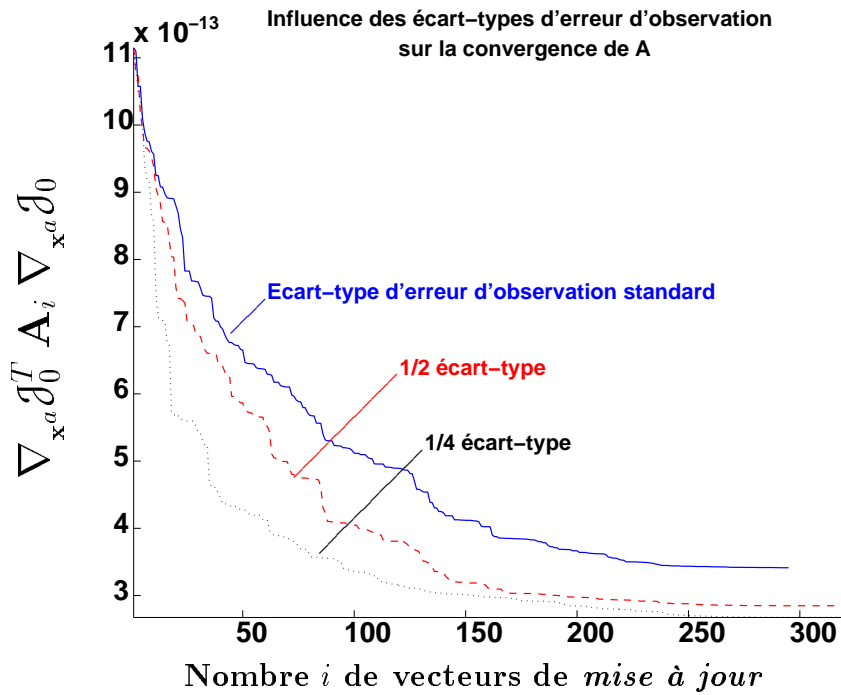


FIG. 3.15: Influence de la variance des erreurs d'observation sur l'estimation de  $\mathbf{A}$ . La courbe en trait plein donne l'évolution du scalaire  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}_0^T \mathbf{A}_i \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}_0$  (ou  $\text{Var}(\delta\mathcal{J})$ ) dans le cas de l'expérience de référence, au fur et à mesure que l'estimation de  $\mathbf{A}$  contient plus de vecteurs de mise à jour. Les courbes en tirets et pointillés donnent les résultats obtenus avec des écarts types d'erreur d'observation de température réduits (de moitié, ou aux trois-quarts). Les observations conventionnelles de ce cas de la POI18 ne subissent pas cette modification. La fonction coût étant l'entropie, les unités sont  $s^{-4}$ .

Par ailleurs, on constate que la vitesse de convergence (pente des courbes) change elle aussi entre les expériences. La décroissance est d'autant plus rapide, dès les premières itérations de l'algorithme, que la confiance dans les observations ciblées est grande. Les tous premiers vecteurs de *mise à jour* correspondent à l'effet des observations ciblées (cf. annexe B.2). Cela illustre le fait que des observations à faible  $\sigma_o$  contribuent plus fortement au terme  $J_o$  de la fonction objective de l'analyse et à son gradient  $\nabla J$ .

Ainsi, il ne semble pas qu'il soit nécessaire d'utiliser autant de vecteurs de *mise à jour* pour estimer  $\text{Var}(\delta\mathcal{J})$  dans les trois expériences. En fait, si nous nous basons sur le critère de qualité de  $\mathbf{A}$  utilisé dans la partie 3.4.2-b. et dans le tableau (3.5) avec une limite de 5% d'erreur sur l'estimation de  $\mathcal{G}$ , il faut tout autant de vecteurs. En effet, pour atteindre une pente caractéristique de l'asymptote il faut environ 200 vecteurs dans les 3 cas. C'est même la seconde expérience qui atteint ce critère avec le moins de vecteurs de *mise à jour*. Cependant, si on est plus tolérant sur la qualité de  $\mathbf{A}$  (limite de 5% sur le taux de décroissance de  $\mathfrak{R}$ ), c'est bien le troisième expérience qui nécessite le moins de vecteurs, car c'est dans ce cas que les plus basses estimations de  $\text{Var}(\delta\mathcal{J})$  sont atteintes le plus rapidement (vers 130 vecteurs).

Cette expérience suggère ainsi que le déploiement de ces observations à forte confiance

dans la zone sensible (selon  $\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}_0$ ), permet d'avoir une estimation raisonnable de  $\mathbf{A}$  avec moins de vecteurs de *mise à jour*.

Ce résultat confirme que le calcul de  $\mathbf{A}$  et donc de la sensibilité aux observations fonctionne bien dans le cadre du ciblage avec des observations de bonne qualité.

Ainsi, pour une valeur de  $Var(\delta \mathcal{J})$  donnée, peu d'observations de bonne qualité produiront des vecteurs de *mise à jour* qui permettent un calcul rapide d'une estimation de  $\mathbf{A}$  satisfaisante. Au contraire, de très nombreuses observations de moindre qualité demandent beaucoup plus de vecteurs de *mise à jour* dans le calcul, qui du fait de ce coût se révèle difficilement utilisable en opérationnel.

### 3.4.3 Validation de la sensibilité aux observations : tests numériques

#### Test de l'adjoint

Dans les premiers temps de la validation de la sensibilité aux observations, il s'agit de valider l'opérateur adjoint  $\mathbf{K}^T$  que nous avons mis en place. Il faut vérifier que le gain direct  $\mathbf{K}$  et l'opérateur  $\mathbf{K}^T$  sont bel et bien adjoints.

Pour cela, on construit un test numérique directement issu de la définition théorique d'un opérateur adjoint (cf. équation 2.18b de la partie 2.1.2, mais appliquée à l'opérateur  $\mathbf{K}^T$  comme dans l'équation 2.38c).

Soit  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{K} \delta \mathbf{y}$ , la variation de l'état  $\mathbf{x}$  due à la variation  $\delta \mathbf{y}$  de la valeur des observations  $\mathbf{y}$ . On peut écrire de façon générale :

$$\langle \delta \mathbf{x} ; \delta \mathbf{x} \rangle_X = \langle \delta \mathbf{x} ; \mathbf{K} \delta \mathbf{y} \rangle_X \quad (3.30a)$$

$$= \langle \mathbf{K}^T \delta \mathbf{x} ; \delta \mathbf{y} \rangle_Y \quad (3.30b)$$

où  $\langle ; \rangle_X$  est le produit scalaire défini dans l'espace du vecteur d'état et  $\langle ; \rangle_Y$  est le produit scalaire naturellement défini sur l'espace des observations ( $\mathbf{y}$  ou  $\delta \mathbf{y}$ ). Pour tester la validité de l'adjoint de l'opérateur  $\mathbf{K}$ , on vérifie le comportement du scalaire  $\mathbf{T}_2$  donné par la formule (3.31) ci-dessous.

$$\mathbf{T}_2 = \frac{\langle \delta \mathbf{x} ; \delta \mathbf{x} \rangle_X}{\langle \delta \mathbf{y} ; \mathbf{K}^T \delta \mathbf{x} \rangle_Y} \quad (3.31)$$

$\mathbf{T}_2$  doit être très proche de 1, pour tout  $\delta \mathbf{x}$  et  $\delta \mathbf{y}$ .

Rappelons que la formulation du *gain*  $\mathbf{K}$  s'utilise ainsi :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= \mathbf{K} \delta \mathbf{y} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \delta \mathbf{y} \end{aligned}$$

L'estimation de  $\delta \mathbf{x}$  nécessite l'emploi de l'opérateur  $\mathbf{R}^{-1}$  qui correspond à une matrice diagonale pour le système d'observation utilisé (et qui est donc auto-adjointe), puis l'application de la version adjointe de l'opérateur d'observation linéarisé, et enfin de  $\mathbf{A}$ , opérateur qui correspond à une matrice symétrique donc auto-adjointe elle aussi. L'opérateur adjoint utilise

la partie relative à l'assimilation du calcul de la sensibilité aux observations : il est appliqué à  $\delta\mathbf{x}$  pour le calcul du dénominateur de  $\mathbf{T}_2$ .

On a vérifié que  $\mathbf{T}_2$  donne un résultat très proche de l'unité pour plusieurs situations. À titre d'exemple, nous donnons ici les caractéristiques d'une expérience avec une observation de température et une observation de vent (issues d'une sonde ciblée du **G-IV** sur la POI18, c'est-à-dire le 22 février 1997 à 12UT), décrites dans le tableau (3.6).

On procède au calcul de  $\langle\delta\mathbf{x};\delta\mathbf{x}\rangle_X$  en utilisant la norme de l'énergie totale ( $\mathcal{E}$  cf. équation 2.11) sur  $\delta\mathbf{x}$  pour différentes perturbations ( $\delta\mathbf{y}$ ) des observations. La valeur du test de l'adjoint  $\mathbf{T}_2$  reste proche de 1. avec 6 chiffres significatifs pour les différentes expériences effectuées. Nous considérons ces résultats satisfaisants. L'opérateur  $\mathbf{K}^T$  est l'adjoint de  $\mathbf{K}$ .

Variable	valeur	innovation ( $\mathbf{y}^o - H\mathbf{x}^b$ ) ou $\delta\mathbf{y}$	écart type ( $\sigma_o$ )
température (degrés)	$\sim -18.46$	$\sim 0.7$	1.4
vent zonal ( $m.s^{-1}$ )	$\sim 10.33$	$\sim 1.2$	2.4
vent méridien ( $m.s^{-1}$ )	$\sim -11.01$	$\sim 1.2$	2.4

TAB. 3.6: *Caractéristiques des observations issues d'une sonde ciblée du G-IV dans la POI18 et utilisées comme point de départ du test de l'adjoint sur  $\mathbf{K}^T$ , ie : l'opérateur d'assimilation du 3D-Var.*

tion 2.11) sur  $\delta\mathbf{x}$  pour différentes perturbations ( $\delta\mathbf{y}$ ) des observations. La valeur du test de l'adjoint  $\mathbf{T}_2$  reste proche de 1. avec 6 chiffres significatifs pour les différentes expériences effectuées. Nous considérons ces résultats satisfaisants. L'opérateur  $\mathbf{K}^T$  est l'adjoint de  $\mathbf{K}$ .

### Test du gradient

Le test du gradient permet de vérifier à la fois la validité d'un code adjoint et de sonder les limites de validité de l'hypothèse linéaire tangente nécessaire aux calculs en question. Ce test se base sur l'étude du comportement du scalaire  $\mathbf{T}_1$  en fonction de l'amplitude du scalaire  $\alpha$  qui définit l'état perturbé  $\mathbf{x}'$ . Le test du gradient est valable pour toute direction  $\delta\mathbf{x}$  de perturbation de  $\mathbf{x}$ , cependant nous choisissons ici une direction particulière :  $\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J}$ .

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \alpha\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J}$$

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\mathcal{J}(\mathbf{x}) - \mathcal{J}(\mathbf{x}')}{\alpha\langle\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J}; \nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J}\rangle_X} \quad (3.33)$$

où  $\langle;\rangle_X$  représente le produit scalaire défini sur l'espace des phases de  $\mathbf{x}$  et  $\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{J}$  est le gradient initial (avant perturbation). Ici  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sont définis dans le même espace et au même instant. L'amplitude de la perturbation imprimée à l'état initial varie sur un spectre de valeurs allant d'une limite inférieure où la significativité du test se perd dans la précision des calculs, à des valeurs de plusieurs ordres de grandeur supérieurs pour lesquelles l'hypothèse linéaire tangente est caduque. À l'optimum,  $\mathbf{T}_1$  tend vers la valeur 1.

### Mise en œuvre

Les modèles linéaires tangents ( $\mathbf{M}$ ) et adjoints ( $\mathbf{M}^T$ ) au modèle de prévision numérique

sont maintenant très fréquemment utilisés. Ainsi à Météo-France, modèles linéaires tangent et adjoint sont employés quotidiennement dans l'algorithme d'assimilation 4D-Var. On considère donc que cette partie de l'outil est validée et qu'il n'est pas nécessaire de poursuivre plus avant un propos détaillé sur ce point particulier. Ce test a tout de même été effectué afin de s'assurer que toute la *filière* du calcul de sensibilité aux observations est bien cohérente.

Nous avons donc élaboré le test du gradient pour le calcul de sensibilité lié à l'assimilation. Pour cela, il nous faut définir une fonction coût  $\mathcal{J}$ , qui est ici fonction de l'état analysé (la partie prévision qui utilise l'adjoint du modèle de prévision n'est donc pas incluse). Nous avons effectué ces tests pour les fonctions coût "énergie de l'incrément d'analyse" et "enstrophie de l'état analysé".

La mise en œuvre d'un tel test numérique n'est pas évidente. En effet, il s'agit d'un test numérique extrêmement sévère, où la convergence du ratio  $\mathbf{T}_1$  vers l'unité est garantie tant que l'on n'atteint pas la précision machine lorsque le test se fait au sein d'un seul et même programme informatique. Dans le cas de la sensibilité aux observations, l'algorithme a été développé sur une base de plusieurs appels successifs du modèle ARPEGE, comme c'est le cas de l'assimilation variationnelle elle-même (cf. figure 3.1). Entre ces étapes, on procède à l'écriture de fichiers selon des formats pré-définis pour lesquels la précision d'écriture est inférieure à la précision machine. Nous avons ainsi pu montrer qu'une écriture puis relecture d'un même fichier constitue une perte d'information donc de précision dans les calculs qui s'ensuivent.

D'autre part, du fait de la physique de la mesure, la précision d'une observation de température est rarement inférieure au centième de degré. Cependant le test doit être mené avec d'infimes variations de température ou de vent mesuré. Heureusement, notre outil permet de simuler de très faibles variations des valeurs observées, avec une précision de l'ordre de  $10^{-10}$ . Ainsi, lorsqu'il s'agit d'effectuer une perturbation des données observées de température ou de vent au huitième chiffre significatif, il est clair qu'on est bien loin de toute réalité physique, mais nous sommes ici dans le cadre d'un test purement numérique.

Ainsi appliqué à l'adjoint de l'opérateur d'assimilation le test du gradient prend la forme :

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\mathcal{J}(\mathbf{x}^a) - \mathcal{J}(\mathbf{x}^{a'})}{\alpha \langle \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{J}; \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{J} \rangle_Y} = \frac{\mathcal{J}(\mathbf{x}^a) - \mathcal{J}(\mathbf{x}^{a'})}{\langle \delta \mathbf{y}; \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{J} \rangle_Y}$$

avec  $\delta \mathbf{y} = \alpha \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{J}$ . Enfin, la qualité de ce test dépend des valeurs de  $\mathbf{x}^b$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\delta \mathbf{y}$  choisies initialement, au sens où celles-ci conditionnent la rapide convergence du ratio  $\mathbf{T}_1$ . Ici le point de départ a été choisi arbitrairement, mais l'écart entre la valeur observée et la valeur du modèle au point d'observation (innovation) se trouve dans les limites de l'écart type d'erreur d'observation. Les observations de température et de vent sont les mêmes que celles utilisées pour le test de l'adjoint cité auparavant.



### Résultats du test du gradient

L'amplitude du facteur de perturbation initial ( $\alpha_1$ ) est choisie de telle sorte que la perturbation initiale soit de l'ordre de grandeur du dixième d'écart type, pour les paramètres observés. À chaque itération de l'algorithme, la perturbation est d'un ordre de grandeur inférieur.

La figure (3.16) donne l'évolution du test  $\mathbf{T}_1$  en fonction des itérations. L'itération 1 correspond à  $\alpha_1 = 1.0 \times 10^{-2}$ .

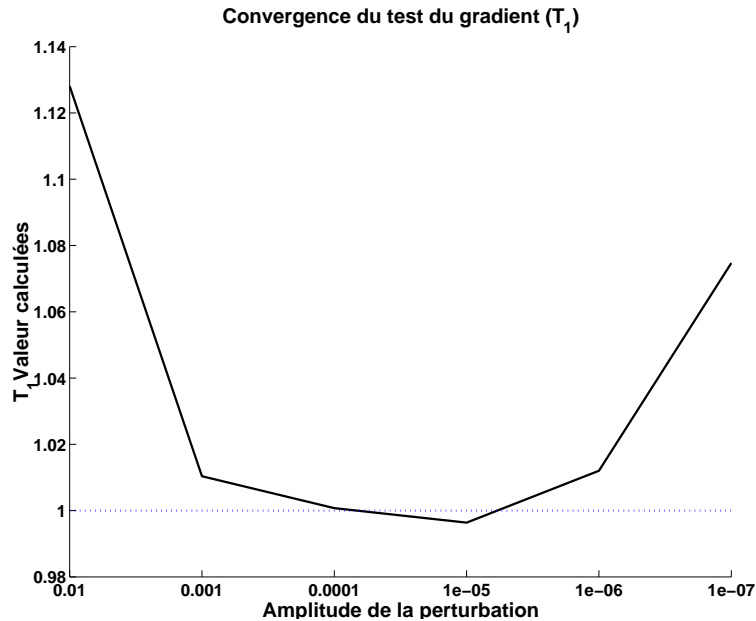


FIG. 3.16: Valeur du test  $\mathbf{T}_1$  du gradient appliqué à la sensibilité aux observations.  $\alpha_1 = 1.0 \times 10^{-2}$  correspond à une perturbation de  $0.2\text{ K}$  en température et de  $0.2\text{ m.s}^{-1}$  en vent de l'observation synthétique. Les perturbations indiquées en abscisse décroissent vers la droite avec les itérations du test du gradient.

Nous avons pu montrer qu'alors que le test  $\mathbf{T}_1$  commence à converger de façon significative, on atteint les limites de précision en ce qui concerne l'expression de  $\delta\mathbf{y}$ , au niveau de l'écriture de certains fichiers. Ainsi la convergence obtenue de l'ordre de  $10^{-2}$  est la meilleure que l'on puisse avoir compte tenu de ce facteur de perte de précision dû à l'écriture dans des fichiers. On note cependant une très rapide convergence vers cette valeur. Le test se dégrade dès lors que l'amplitude de la perturbation appliquée aux observations est au delà des limites de cette précision. Nous avons pu mettre en évidence que le système d'assimilation 3D-Var agit comme un filtre et qu'au delà d'un certain rang de précision (ici, le rang 7 avec  $\alpha_7 = 10^{-8}$ ), les valeurs de  $\mathcal{J}(\mathbf{x}^{a'})$  obtenues sont bruitées, et le test  $\mathbf{T}_1$  a un comportement chaotique (non montré).

Pour conclure cette partie sur le test du gradient, on soulignera deux idées majeures. La première est que structurellement, ce test numérique peut poser des difficultés lorsque l'opérateur testé se révèle être une suite d'appels au modèle, entrecoupée d'écritures puis de relectures de fichiers. Nous avons pu vérifier ce fait sur d'autres parties de code adjoint

validées par ailleurs. La seconde idée est que malgré cela, nous avons montré que ce test converge vers une valeur proche de l'unité à  $10^{-2}$  près. Le caractère adjoint du code étant validé par le test de l'adjoint, la précision de  $10^{-2}$  sur le test du gradient nous apparaît suffisamment satisfaisante pour procéder à la validation de toute la filière de sensibilité aux observations dans des conditions proches de celles de son utilisation réelle.

## Tests non-linéaires

### Philosophie et mise en œuvre des tests non-linéaires

L'étape finale consiste en des tests non-linéaires, où les variations initiales ( $\delta\mathbf{y}$ ) imprimées au système sont de l'ordre de l'écart type des erreurs d'observation. En effet, dans le système d'assimilation de données, les observations *acceptées* lors de la phase d'écrémage (ou *screening*), sont celles dont la distance à l'ébauche se situe dans une certaine limite (elle-même fonction des statistiques des erreurs d'ébauche et d'observation). Il est donc logique de considérer un test non-linéaire sur la sensibilité aux observations qui se place dans de telles conditions réelles. Ainsi, on comparera une estimation linéaire de l'impact des observations ciblées sur la fonction coût (cf. équation 2.38c :  $\delta\mathcal{J} = \langle \delta\mathbf{y}; \nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{J} \rangle$ ) à l'estimation directe (par différence entre deux estimations de  $\mathcal{J}$ ) suivant le calcul de  $\Delta\mathcal{J}$  suivant :

$$\Delta\mathcal{J} = \mathcal{J}(M(\mathbf{x})) - \mathcal{J}(M(\mathbf{x}')) \quad (3.34)$$

où  $\mathbf{x}'$  est l'analyse perturbée par une variation  $\delta\mathbf{y}$  des valeurs observées et qui entrent dans l'assimilation.

Le mode opératoire pour ces tests est le suivant : il s'agit de perturber les valeurs de certaines d'observations (selon les expériences détaillées ci-après) alors que tous les autres paramètres de l'expérience d'assimilation-prévision restent identiques à ceux d'une expérience témoin (où les valeurs observées sont réelles). Le but du test non-linéaire est de vérifier l'applicabilité de notre algorithme dans des conditions proches du réel et renseigne sur les limites de l'emploi de l'outil de la sensibilité aux observations, basé sur l'hypothèse linéaire-tangente qui peut se révéler caduque dans ce cadre. Il ne s'agit donc pas, en comparant  $\delta\mathcal{J}$  à  $\Delta\mathcal{J}$ , d'obtenir une égalité avec une grande précision. On cherchera à vérifier que les estimations sont proches et au moins du même ordre de grandeur.

Dans le cadre de ces tests, nous avons considéré deux types d'expériences de perturbation des observations. Nous avons effectué des expériences où les mesures de toutes les observations (conventionnelles et ciblées) sont perturbées, mais aussi des expériences où seules les observations ciblées ont été perturbées afin de vérifier la séparabilité (entre données conventionnelles et données ciblées) du vecteur de sensibilité aux observations (cf. équation 2.52).

Pour réaliser ces tests, nous avons procédé à des expériences d'assimilation parallèles : dans l'une, qui est le témoin (ou expérience non perturbée), on assimile des observations ciblées et des observations conventionnelles.

- Dans l'expérience où seules les mesures des observations ciblées sont perturbées les valeurs en question sont modifiées de telle sorte que l'innovation pour ces observations soit à l'opposé du cas de référence: ces observations ciblées ( $t$ ) modifiées mesurent la valeur  $\mathbf{y}'_t = \mathbf{y}_t - 2 \times \mathbf{d}_t$  où  $\mathbf{d}_t$  représente l'innovation des observations ciblées et  $\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - H_t \mathbf{x}^b$ . On déduit de la perturbation que l'innovation de l'expérience jumelle est :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_t &= \mathbf{y}'_t - H_t \mathbf{x}^b \\ &= -\mathbf{d}_t \end{aligned}$$

- Dans le cas où toutes les observations sont concernées par la perturbation, celle-ci est choisie pour être égale à l'opposé de l'innovation de référence : ( $\mathbf{d}' = 0$ ).

En outre, afin d'affiner notre diagnostic, nous avons choisi d'estimer  $\delta\mathcal{J}$  en deux points de la filière de calcul de la sensibilité aux observations. On distingue ainsi  $\delta\mathcal{J}_y$  qui est calculé dans l'espace des observations après application de l'opérateur  $\mathbf{K}^T$  et  $\delta\mathcal{J}_x$  qui est calculé dans l'espace du modèle avant application de l'opérateur  $\mathbf{K}^T$ . Cette distinction va nous permettre d'évaluer très clairement le comportement de l'adjoint de l'assimilation dans ces tests non-linéaires. La formulation de ces deux estimations de  $\delta\mathcal{J}$  est :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{J}_y &= \langle \delta\mathbf{y}; \nabla_y \mathcal{J} \rangle_Y \\ \delta\mathcal{J}_x &= \langle \delta\mathbf{x}_0; \nabla_x \mathcal{J} \rangle_X \end{aligned}$$

$\delta\mathcal{J}_y$  permet de valider toute la filière de sensibilité aux observations.  $\delta\mathcal{J}_x$  permet de distinguer au sein de cette filière quelles parts des erreurs éventuelles doivent être imputées à la prévision non-linéaire et au calcul de la fonction coût  $\mathcal{J}$ .

Dans le cas où nous ne considérons que la perturbation des mesures des observations ciblées ( $\mathbf{y}'_t$ ), nous effectuons une assimilation des observations perturbées avec les observations conventionnelles non modifiées. Suite à cette assimilation, une nouvelle prévision  $\mathbf{x}^f$  est effectuée sur laquelle nous calculons la fonction  $\mathcal{J}(\mathbf{x}^f)$  pour comparaison à la valeur  $\mathcal{J}(\mathbf{x}^f)$  témoin (cf. équation 3.34). Dans le tableau (3.7), nous récapitulons les étapes des deux expériences jumelles (nous reprenons les notations de l'équation (2.50) pour distinguer observations conventionnelles  $\mathbf{y}_c$  et ciblées  $\mathbf{y}_t$ ).

Le tableau (3.9) regroupe des résultats de  $\delta\mathcal{J}_y$ ,  $\delta\mathcal{J}_x$  et  $\Delta\mathcal{J}$  pour des expériences décrites dans le tableau (3.8). Les expériences nommées *EXP - ct\** utilisent les observations perturbées conventionnelles et les données ciblées du vol du *G-IV* de la POI18 (22 février 1997 à 12h TU). Pour les expériences nommées *EXP - t\** seules les données ciblées sont modifiées et les observations conventionnelles conservent leur valeur originale. Dans ce cas, en plus d'avoir perturbé les mesures nous avons aussi testé l'influence des écarts types des erreurs d'observation en les diminuant de moitié et au quart par rapport à l'expérience utilisant les écarts types initiaux.

L'examen des quelques résultats numériques du tableau (3.9) laisse apparaître les caractéristiques suivantes :

Expérience témoin	$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_c \\ \mathbf{y}_t \end{bmatrix} \xrightarrow[(3D-Var)]{\mathbf{K}} \mathbf{x}^a \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathbf{x}^f)$		
Variations	$\delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \times (\mathbf{y}_t - H_t \mathbf{x}^b) \end{bmatrix}$	$\delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^a - \mathbf{x}'$	$\Delta \mathcal{J} = \mathcal{J} - \mathcal{J}'$
Expérience perturbée	$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_c \\ \mathbf{y}'_t \end{bmatrix} \xrightarrow[(3D-Var)]{\mathbf{K}} \mathbf{x}' \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathcal{J}' = \mathcal{J}(\mathbf{x}'^f)$		
Calcul adjoint	$\nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{J}$	$\xleftarrow[\mathbf{K}^T]{} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$	$\xleftarrow[\mathbf{M}^T]{} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}^f}$
Calcul de $\delta \mathcal{J}$	$\delta \mathcal{J}_{\mathbf{y}} = \langle \delta \mathbf{y}; \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{J} \rangle_{\mathbf{Y}}$	$\delta \mathcal{J}_{\mathbf{x}} = \langle \delta \mathbf{x}_0; \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \rangle_{\mathbf{X}}$	

TAB. 3.7: Récapitulatif de la méthodologie des tests non-linéaires dans le cas où seul le sous-système des observations ciblées ( $\mathbf{y}_t$ ) est perturbé: On compare  $\Delta \mathcal{J}$  à  $\delta \mathcal{J}$ . Les calculs sont très proches de ceux du test du gradient, mais on se place dans des conditions réelles d'amplitude des perturbations.

Expérience	Perturbation de $\mathbf{y}_t$	Perturbation de $\mathbf{y}_c$	$\sigma_o$ de $\mathbf{y}_t$
EXP - t0	$2 \times \mathbf{d}_t$	$\emptyset$	$\sigma_o$
EXP - ct0	$\mathbf{d}_t$	$\mathbf{d}_c$	$\sigma_o$
EXP - t1	$2 \times \mathbf{d}_t$	$\emptyset$	$\sigma_o/2.$
EXP - ct1	$\mathbf{d}_t$	$\mathbf{d}_c$	$\sigma_o/2.$
EXP - t2	$2 \times \mathbf{d}_t$	$\emptyset$	$\sigma_o/4.$
EXP - ct2	$\mathbf{d}_t$	$\mathbf{d}_c$	$\sigma_o/4.$

TAB. 3.8: Description des caractéristiques des expériences de tests non-linéaires menées sur la POI18. On distingue la perturbation des observations ciblées ( $\mathbf{y}_t$ , indice  $t$ ) de la perturbation des observations conventionnelles ( $\mathbf{y}_c$  et innovation  $\mathbf{d}_c$  associée, indice  $c$ ). EXP - ct\* utilise les observations perturbées conventionnelles et ciblées, EXP - t\* utilise les observations conventionnelles originales et les observations ciblées modifiées. Les écarts types des erreurs des observations ciblées est donné dans la quatrième colonne de ce tableau:  $\sigma_o$  est l'écart type d'origine.

Nom de l'expérience	$\delta\mathcal{J}_y = \langle \delta\mathbf{y}; \nabla_y \mathcal{J} \rangle$	$\delta\mathcal{J}_x = \langle \delta\mathbf{x}_o; \nabla_x \mathcal{J} \rangle$	$\Delta\mathcal{J} = \mathcal{J} - \mathcal{J}'$
<i>EXP - t0</i>	$1.0474 \times 10^{-8}$	$6.8095 \times 10^{-9}$	$4.4897 \times 10^{-9}$
<i>EXP - ct0</i>	$8.2512 \times 10^{-8}$	$6.5089 \times 10^{-8}$	$3.6076 \times 10^{-8}$
<i>EXP - t1</i>	$2.9765 \times 10^{-9}$	$1.1245 \times 10^{-8}$	$5.8334 \times 10^{-9}$
<i>EXP - ct1</i>	$7.8372 \times 10^{-8}$	$6.8924 \times 10^{-8}$	$3.9122 \times 10^{-8}$
<i>EXP - t2</i>	$1.9028 \times 10^{-8}$	$1.8856 \times 10^{-8}$	$7.3416 \times 10^{-9}$
<i>EXP - ct2</i>	$7.2057 \times 10^{-8}$	$7.4356 \times 10^{-8}$	$4.3176 \times 10^{-8}$

TAB. 3.9: Résultats de tests non-linéaires effectués sur des cas de la POI18. Les caractéristiques des expériences sont détaillées dans le tableau (3.8). L'échéance de la prévision est nulle (0 heure) et l'unité des variations de la fonction coût enstrophie :  $s^{-2}$ .

- La comparaison entre  $\delta\mathcal{J}_x$  (colonne 3) et  $\Delta\mathcal{J}$  (colonne 4) montre que les différences majeures apparaissent dans la partie représentative de la prévision plutôt que dans la partie représentative de l'assimilation de données (comparaison des colonnes 2 et 3 du tableau 3.9). Ceci indique que les conditions optimales de l'hypothèse linéaire tangente ne sont pas vérifiées pour ces tests. À l'examen de l'incrément d'analyse (ou la différence entre les analyses "jumelles", selon l'expérience), celui-ci apparaît être une perturbation trop importante pour vérifier l'hypothèse linéaire tangente. Ceci se vérifie d'autant plus que la différence entre cas perturbé et cas témoin s'accroît. En effet, plus  $\sigma_o$  est faible, plus l'incrément est important (l'analyse passe plus près des observations donc plus loin de l'ébauche) et plus cette différence entre  $\delta\mathcal{J}_x$  et  $\Delta\mathcal{J}$  est grande. Cependant les résultats sont du même ordre de grandeur, ce qui est un point positif.

- La comparaison de  $\delta\mathcal{J}_y$  et  $\delta\mathcal{J}_x$  montre que plus  $\sigma_o$  est faible (quel que soit le réseau perturbé), plus  $\delta\mathcal{J}_y$  et  $\delta\mathcal{J}_x$  sont comparables. Ceci s'explique par la prépondérance accrue de ces observations de bonne qualité dans la *mise à jour* de  $\mathbf{A}$  (cf. partie 3.4.2-d.), ce qui implique une qualité accrue de l'adjoint de l'opérateur d'assimilation.

- Les écarts existants entre les estimations de  $\delta\mathcal{J}_y$  et de  $\Delta\mathcal{J}$  sont donc comparables aux écarts entre  $\delta\mathcal{J}_x$  et  $\Delta\mathcal{J}$ , ce qui signifie que c'est le calcul du gradient de la fonction coût ( $\mathcal{J}$  est quadratique dans ces expériences) aux conditions initiales de la prévision (même d'échéance nulle dans ces expériences) qui met l'hypothèse linéaire tangente en défaut, dans toute la filière de calcul de la sensibilité aux observations.

Les tests non-linéaires sur la partie de l'adjoint de l'opérateur d'assimilation sont très satisfaisants, par ailleurs.

### Conclusion à propos des tests numériques

Ces tests non-linéaires sont nécessaires afin de valider le calcul de sensibilité aux observations. L'utilisation de cet outil dans un cadre diagnostique avec des amplitudes proches de celles de l'innovation (la réalité de l'assimilation de données) ne permet pas de se contenter

des tests linéaires (tests de l'adjoint et du gradient). Les tests non-linéaires sont importants pour se fixer une idée de la confiance que l'on peut avoir dans les résultats obtenus dans les expériences réalisées sur les cas de ciblage de FASTEX. Ces tests nous ont ainsi permis de nous convaincre que l'approche développée est consistante tout en mettant en évidence certaines de ces limites. En effet, la filière de calcul de la sensibilité aux observations avec une fonction coût quadratique atteint vite les limites de l'hypothèse linéaire tangente dans les cas où les incréments d'analyse sont importants (cas où l'ébauche est très différente des observations par exemple). Cependant, ce n'est pas l'adjoint des processus d'assimilation, mais plutôt la prévision qui peut mettre la méthode en défaut.

Nous avons bien montré que l'algorithme de sensibilité aux observations est robuste lorsqu'il est soumis aux tests linéaires (test de l'adjoint et test du gradient) classiques de validation. Les résultats de ces tests sont satisfaisants malgré les particularités de l'approche en sensibilité aux observations (cf. perte de précision dans l'écriture de fichiers). De plus, les résultats cohérents obtenus avec des situations numériques courantes de l'assimilation de données réelles (tests non-linéaires) montrent que la sensibilité aux observations pourra être exploitée sur des cas réels.

Mais avant cela, nous souhaitons évaluer la perte d'information lorsque les phases d'analyse de surface et de filtrage des ondes de gravité ne sont pas prises en compte dans le calcul de la sensibilité aux observations. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

### **Effet du filtrage et de l'analyse de surface**

Nous avons vu sur la figure (3.1) que nous avons développé un opérateur adjoint, uniquement pour la partie variationnelle de l'assimilation. Ainsi l'adjoint des étapes d'analyse de surface (interpolation optimale) et de filtrage des incréments ne sont pas prises en compte dans le calcul de la sensibilité aux observations mis en œuvre dans le cadre de cette thèse.

Afin de légitimer ce choix technique et de mener le plus complètement possible cette phase de validation, nous avons essayé de chiffrer les erreurs possibles qui sont introduites par ce choix simplificateur.

Nous devons donc évaluer l'impact de la perte de ces deux étapes sur le résultat de l'assimilation, mais surtout sur le calcul de la sensibilité aux observations. C'est-à-dire qu'il nous faut évaluer l'impact de cette absence dans l'algorithme direct sur la fonction coût  $\mathcal{J}$  finale. C'est ce paramètre qui aura le plus d'effet ensuite, sur le gradient aux conditions initiales. En effet, des études ont montré que la sensibilité aux conditions initiales ne subit que peu l'influence d'une légère variation de trajectoire de linéarisation (Aubert, 1999).

Il faut aussi avoir conscience que l'interpolation optimale de l'assimilation de surface devrait avoir assez peu d'effet sur les phénomènes en altitude qui sont prédominants pour les questions de ciblage. Par ailleurs, le filtrage des incréments d'analyse aura tendance à amoind-

drir l'effet des observations, surtout si celles-ci sont isolées ou si elles ont un effet trop marqué.

Nous avons choisi d'étudier le cas du premier vol de la POI17 (le 17 février 1997 à 18h TU). Nous évaluons l'énergie totale de l'incrément d'analyse ( $\delta \mathbf{x}^a = \mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b$ ) à l'instant initial ainsi que l'énergie totale de la différence entre la prévision issue de l'ébauche et celle issue de l'analyse, à l'instant de prévision c'est-à-dire à 42 heures d'échéance. En choisissant l'ébauche (pas d'assimilation) comme référence, cette évaluation est particulièrement bien adaptée pour mettre en relief l'effet des différentes étapes de l'algorithme d'assimilation. Cette fonction (énergie de l'incrément) joue ici le rôle de fonction coût à l'instant  $t_1$ . Le calcul est effectué sur une zone géographique délimitée par les coordonnées 60°Nord, 40°Nord, 30°Ouest et 0°Ouest, qui correspond au phénomène météorologique d'intérêt de la POI17.

On réalise trois expériences : la première utilise l'analyse directement produite par l'algorithme variationnel (expérience *var*), la seconde utilise une analyse qui a subi en plus l'étape d'analyse des champs de surface (expérience *srf*). La troisième (notée expérience *dfi*) comprend en plus un filtrage selon la technique des filtres digitaux (Lynch *et al.*, 1997). Ces expériences sont faites avec les observations conventionnelles et ciblées combinées (pour les expériences nommées *MSDF*) ou ciblées seules (pour les expériences nommées *GIV*) sur le *domaine d'étude*.

Expérience	<i>var</i>	<i>srf</i>	<i>dfi</i>	à $t_0$ $\mathcal{J}(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b)$	à $t_1$ $\mathcal{J}(M(\mathbf{x}^a) - M(\mathbf{x}^b))$
GIV-bkg				0.	$\sim 0.0$
GIV-var	•			$0.12212 \times 10^{+5}$	$0.40816 \times 10^{+4}$
GIV-srf	•	•		$0.12159 \times 10^{+5}$	$0.42968 \times 10^{+4}$
GIV-dfi	•	•	•	$0.10620 \times 10^{+5}$	$0.39447 \times 10^{+4}$
MSDF-bkg				0.	$\sim 0.0$
MSDF-var	•			$0.32510 \times 10^{+5}$	$0.41224 \times 10^{+4}$
MSDF-srf	•	•		$0.32072 \times 10^{+5}$	$0.43217 \times 10^{+4}$
MSDF-dfi	•	•	•	$0.27765 \times 10^{+5}$	$0.35206 \times 10^{+4}$

TAB. 3.10: Effet de l'assimilation de surface (*srf*) et du filtrage (*dfi*) sur l'énergie totale ( $J.kg^{-1}$ ) de l'incrément d'analyse à l'instant initial ( $t_0$ : 17 février 1997 à 18h TU) et après 42 heures d'intégration du modèle de prévision ( $t_1$ ). L'expérience GIV n'utilise que les données ciblées, MSDF combine données conventionnelles et ciblées sur le domaine d'étude (cf. texte).

L'examen des résultats affichés dans le tableau (3.10) laisse entrevoir que, comme nous le supposons, le filtrage a un effet majoritaire comparé à celui de l'analyse de surface, dont l'absence ne semble pas apporter grand changement sur l'état des champs d'altitude analysés. On note aussi que l'effet du filtrage initial se maintient dans le temps (à  $t_1$ ). C'est particulièrement notable lorsque l'on compare la prévision issue de l'analyse à celle issue de l'ébauche.

Expérience	Comparaison	à t0	à t1
GIV	dfi-bkg	100.00	100.00
GIV	var-bkg	114.99	103.47
GIV	dfi-var	14.99	3.47
GIV	dfi-srf	14.49	8.92
GIV	srf-var	0.49	5.45
MSDF	dfi-bkg	100.00	100.00
MSDF	var-bkg	117.09	117.09
MSDF	dfi-var	17.09	17.09
MSDF	dfi-srf	15.51	22.75
MSDF	srf-var	1.58	5.66

TAB. 3.11: *Effet de l'assimilation de surface (srf) et du filtrage (dfi) : étude comparative. Pourcentages d'erreur sur l'estimation de l'énergie de l'incrément d'analyse à t0 et de la différence entre les prévisions à t1.*

Le tableau (3.11) donne, sous forme de pourcentages, les contributions des différentes étapes de l'assimilation sur l'incrément qu'elle génère. Ces chiffres sont obtenus grâce au calcul suivant : on compare les expériences *bkg*, *var*, *srf* et *dfi* deux à deux, le pourcentage est donc :

$$\frac{|\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2|}{\mathcal{J}_{dfi}} \times 100. \quad (3.37)$$

où  $\mathcal{J}$  est l'énergie totale (cf. équation 2.11) de l'incrément.  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$  représentent l'évaluation de  $\mathcal{J}$  sur les expériences comparées dans ce tableau (3.11). Les références auxquelles nous comparons les conditions (états analysés) initiales obtenues sont d'une part l'ébauche (état de départ) et les analyses issues des expériences nommées *dfi*, considérées comme les meilleures estimations de  $\mathbf{x}^t$ . L'estimation  $\mathcal{J}_{dfi}$  est donc considérée comme la référence : c'est la meilleure estimation possible de  $\mathcal{J}$ .

En comparant *var* et *dfi* selon la formule (3.37) (ligne *var* – *dfi* du tableau 3.11), on peut atteindre presque 18% d'erreur relative sur  $\mathcal{J}$ . Cette *erreur* est cependant à relativiser puisque l'influence de l'étape *var* par rapport au point de départ (*bkg*, ligne *var* – *bkg*) reste d'un ordre de grandeur supérieur. L'étape variationnelle reste donc prépondérante par rapport aux étapes de surface et de filtrage qui apportent de petites modifications des champs d'altitude.

Par ailleurs, le modèle de prévision lui-même a un effet filtrant des ondes de gravité (phénomènes diffusifs). La prévision (ou son adjoint) prend donc le relais de l'étape de filtrage dans l'assimilation. Ceci explique que la colonne "t1" du tableau (3.11) donne des résultats encore plus favorables à notre choix simplificateur que la colonne notée "t0".

Cependant, dans le cas où les observations conventionnelles sont utilisées en plus des observations ciblées (lignes *MSDF*), on note que l'effet du filtrage (ligne *var* – *dfi*) ne change guère entre t0 et t1. Le modèle de prévision semble avoir eu moins d'effet filtrant que dans le



cas où seules les observations ciblées contribuent à l'incrément d'analyse (lignes *GIV*) dont les échelles caractéristiques sont plus petites.

Enfin, nous avons effectué la même démarche en utilisant la fonction coût entropie à  $t_1$ . Les résultats de ces tests sont récapitulés dans les tableaux (3.12) et (3.13).

L'examen des pourcentages d'erreur sur l'estimation de  $\mathcal{J}$  (3.37) présentés dans le tableau (3.13) ne laisse aucun doute. C'est bien le processus d'assimilation variationnel qui a le plus d'impact sur les évaluations de  $\mathcal{J}$ . En effet, dans le cas de cette fonction coût, l'ajout des étapes d'analyse de surface et de filtrage, génère une variation d'estimation de  $\mathcal{J}$  de deux ordres de grandeur inférieure à celle provoquée par l'assimilation variationnelle des observations d'altitude.

Il est utile de se remémorer que par leur définition (cf. partie 1.2), les observations ciblées sont susceptibles de provoquer une variation importante de la fonction coût pour laquelle est définie la région sensible de leur déploiement. Il est donc crucial que l'étape variationnelle qui utilise ces observations ciblées et dont nous avons développé un opérateur adjoint, soit prépondérante dans le processus d'assimilation. En outre, il est utile que cela soit aussi vérifié pour de petits déploiements d'observations, tels que les déploiements d'observations ciblées, en l'occurrence.

Expérience	<i>var</i>	<i>srf</i>	<i>dfi</i>	Entropie $\Xi$ ( $s^{-2}$ )
GIV-bkg				$2.1955 \times 10^{-5}$
GIV-var	•			$1.5656 \times 10^{-4}$
GIV-srf	•	•		$1.5708 \times 10^{-4}$
GIV-dfi	•	•	•	$1.5583 \times 10^{-4}$
MSDF-bkg				$2.1955 \times 10^{-5}$
MSDF-var	•			$1.6239 \times 10^{-4}$
MSDF-srf	•	•		$1.6118 \times 10^{-4}$
MSDF-dfi	•	•	•	$1.5933 \times 10^{-4}$

TAB. 3.12: *Même type de résultat que dans le tableau (3.10), mais avec la fonction coût entropie.*

Il ressort de cette étude que la fonction coût *entropie* est très peu sensible à l'omission des étapes *srf* et *dfi*.

### 3.5 Conclusion sur les choix algorithmiques et les validations

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à décrire la mise en place de l'algorithme de la sensibilité aux observations afin de mettre en évidence l'originalité, les particularités ainsi que les points difficiles de cette approche. La validation de cet algorithme nous a permis de prendre conscience des potentialités et des limites de la méthode.

Expérience	Comparaison	Erreur relative sur $\mathcal{J}$
GIV	dfi-bkg	85.91
GIV	var-bkg	86.38
GIV	dfi-var	0.47
GIV	dfi-srf	0.80
GIV	srf-var	0.34
MSDF	dfi-bkg	86.22
MSDF	var-bkg	88.14
MSDF	dfi-var	1.92
MSDF	dfi-srf	1.16
MSDF	srf-var	0.76

TAB. 3.13: *Effet de l'assimilation de surface (srf) et du filtrage (dfi) : étude comparative. Pourcentages d'erreur sur l'estimation de  $\mathcal{J}$ .*

### À propos des algorithmes

Nous avons développé l'adjoint de l'opérateur d'assimilation variationnelle 3D-Var d'ARPEGE. La clef de voûte de cet opérateur est l'estimation de l'opérateur  $\mathbf{A}$  dans la direction du gradient  $\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$ . De par nos choix techniques, l'estimation de  $\mathbf{A}$  passe par des vecteurs de *mise à jour* qui sont générés par une assimilation variationnelle directe qui est donc indispensable à la mise en œuvre de la méthode. Bien que ne dépendant pas des valeurs mesurées par les observations le calcul de  $\mathbf{A}$  nécessite ces mesures au travers de l'assimilation.

### Validation de $\mathbf{A}$

En tirant parti des propriétés intéressantes des expériences d'assimilation avec une observation unique, nous avons pu valider ces vecteurs de *mise à jour*, à la fois en amplitude et en morphologie. Ces études nous ont aussi permis de mettre en évidence l'effet des fonctions de structure dans l'adjoint de l'assimilation et leur influence dans le calcul de  $\mathbf{c} = \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$  (cf. équation 3.3).

De plus, nous avons pu cerner le nombre de vecteurs nécessaires à l'estimation de  $\mathbf{c}$  pour une bonne description des effets de l'analyse variationnelle sur les zones sensibles de type FASTEX.

Grâce à la restriction du domaine géographique dans lequel les observations conventionnelles sont assimilées en plus des observations ciblées et grâce à l'emploi de 300 vecteurs de *mise à jour*, nous sommes parvenus à une formulation de l'adjoint de l'opérateur d'assimilation  $\mathbf{K}^T$  qui soit suffisamment précise pour son utilisation dans le cadre du ciblage.

Enfin, nous avons cité auparavant l'existence d'autres méthodes afin de déterminer l'adjoint  $\mathbf{K}^T$ . Nous n'avons pas eu l'occasion de confronter nos choix présents avec une autre stratégie d'estimation. Une telle étude reste parmi les perspectives d'évolution de cette approche de la

sensibilité aux observations.

### **Validation de la sensibilité aux observations**

La validation du calcul de la sensibilité aux observations dans son ensemble a pu être réalisée grâce à différents tests numériques. Ainsi et par construction de l'adjoint de l'opérateur d'assimilation, le test de l'adjoint a donné de très bons résultats.

Par contre, nos choix algorithmiques qui nécessitent l'écriture de fichiers intermédiaires limitent la précision des résultats obtenus avec le test du gradient sur la sensibilité aux observations. Cependant les résultats de ces tests restent satisfaisants.

Enfin, nous avons aussi porté notre attention à la validité des hypothèses que nous avons utilisées dans le calcul de la sensibilité aux observations, telles que l'hypothèse linéaire tangente ou l'hypothèse que les processus variationnels soient prépondérants par rapport aux processus de filtrage, dans le 3D-Var. Ainsi, nous avons contrôlé la validité de l'hypothèse linéaire tangente avec les tests non-linéaires. Par ailleurs, nous avons vérifié que le fait de limiter l'algorithme d'assimilation à l'étape variationnelle seule n'est pas réducteur. Plus de 80% de la variation de l'état du modèle entre ébauche et état analysé est due à cette phase variationnelle. L'étape d'analyse de surface a très peu d'influence et le phénomène de filtrage est relayé par le modèle de prévision lorsque la fonction coût est définie sur un état prévu. Pour la fonction coût entrophie (équation 2.12) pour étudier les cyclogenèses, l'outil de la sensibilité aux observations est considéré comme valide de façon satisfaisante.



## Chapitre 4

# Étude de la POI17 : sensibilité et impact des observations

Dans les parties précédentes, nous avons détaillé les aspects théoriques et la formulation mathématique de la sensibilité aux observations, puis nous avons validé en détail, l’approche que nous avons mise en œuvre dans le contexte de l’assimilation variationnelle 3D du modèle de prévision numérique ARPEGE.

Dans le présent chapitre, on se focalise sur des résultats obtenus sur la POI17 de FASTEX. Ces résultats sont donnés sous la forme d’une parution scientifique. Il s’agit de l’article (Doerenbecher et Bergot, 2001) paru dans la revue à comité de lecture *NonLinear Processes in Geophysics* (numéro **8(6)**, pages : 467-481).

### 4.1 Présentation de la POI17

On se propose de brièvement présenter le contexte météorologique et la stratégie de ciblage mis en œuvre lors de cette POI17. Le lecteur trouvera par ailleurs force détails sur ces aspects dans l’article de Cammas *et al.* (1999) pour la situation météorologique, ainsi que dans les articles de Langland *et al.* (1998) et celui de Joly *et al.* (1999) pour la description du dispositif de ciblage.

La Période d’Observation Intensive 17, qui s’est déroulée du 16 au 20 février 1997 est considérée par beaucoup comme le *cas FASTEX*. Cette POI est remarquable à plusieurs égards. Tout d’abord, de nombreuses observations ont été effectuées, permettant de bien documenter le cycle de vie d’une dépression active. Elle possède par ailleurs un développement intéressant du point de vue dynamique et qui a suscité de nombreuses études et une documentation abondante.

#### Déploiement des moyens de mesure

La POI17 a bénéficié d’un déploiement très abondant de moyens de mesures (cf. fig. 4.1), aussi bien dans sa phase amont le long des côtes américaines, que dans sa phase terminale au large de l’Irlande (Cammass *et al.*, 1999). De plus, trois bateaux se trouvaient bien placés

sur la trajectoire de la dépression étudiée durant cette POI.

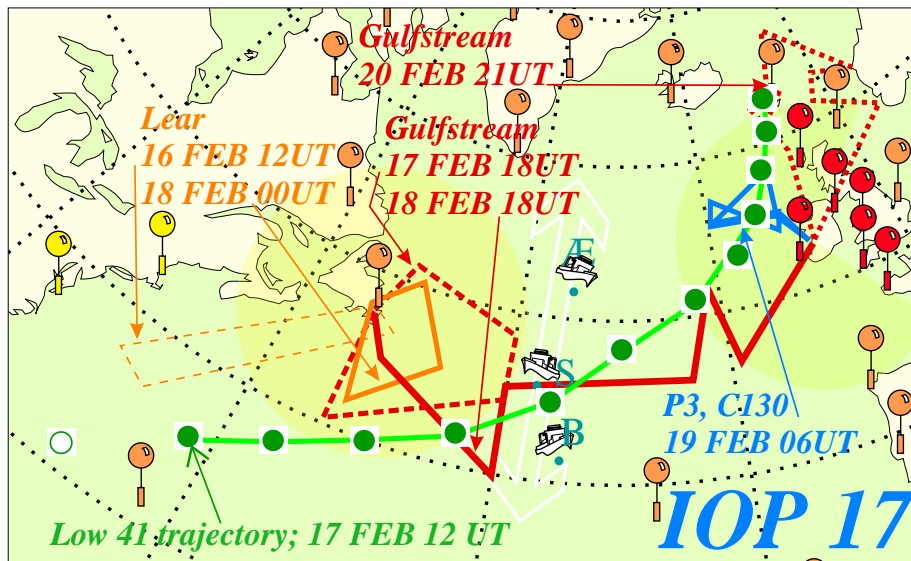


FIG. 4.1: Description de la POI17. (d'après A. Joly et al., 2000). Les ronds reliés entre eux indiquent la trajectoire de la dépression. Un disque (plein) signale une dépression tandis qu'un cercle indique un thalweg. Les ballons en gris clair indiquent la position des stations de radiosondage avec un nombre de 4 sondages par jour en permanence ou en alerte tandis que ceux en gris foncé sont relatifs à des stations à 8 lâchers par jours en cas d'alerte (cas des POI). Les traits gras reportent les trajectoires des vols d'étude de la POI. Les bateaux sont positionnés au lieu de leurs sondages. Le vol du G-IV étudié dans l'article (Doerenbecher et Bergot, 2001) apparaît en tirets sombre au large de Terre-Neuve.

Sept vols d'échantillonnage ont été réalisés, entre le 16 février 12h et le 20 février 21h TU (cf. figure 4.1). Parmi ceux-ci, on compte 3 vols de ciblage. Un vol effectué par le Learjet le long des côtes américaines, débute le 18 février à 00h TU, précédé et suivi par deux vols du G-IV, démarrant le 17 février à 18h TU et le 18 février à 18h TU.

Le vol du Learjet échantillonnait des cibles déterminées par la technique de l'*Ensemble Transform* (Bishop et Toth, 1999).

Le premier vol du G-IV, déployé au large de Terre-Neuve, avait pour but de documenter des structures instables déterminées par les méthodes de l'adjoint. C'est ce vol qui sera documenté dans l'article (Doerenbecher et Bergot, 2001).

Le second vol transatlantique de S<sup>t</sup>-Johns (Terre-Neuve) à Shannon (Irlande) avait pour finalité de documenter des cibles *subjectives* (anomalies de tropopause et précurseur de la dépression).

### Description météorologique

La dépression L41 de la POI17 est issue d'une onde qui apparaît le 17 février entre 6 et 12h

le long de la zone barocline sur l'océan Atlantique Ouest. Elle se développe en une dépression de surface atteignant 941 *hPa* au sud de l'Islande, le 20 février à 00h TU.

Une particularité de ce cas est le développement barocline accéléré par un régime diabatique à partir du 18 février à 00h TU (Mallet *et al.*, 1999b). En effet, dans la première phase, une dépression de surface se maintient sur le continent américain. Malgré une structure d'altitude, cette dépression de surface est le véritable précurseur de la POI17 (Arbogast et Joly, 1998 ; Mallet *et al.*, 1999a).

## 4.2 Article Doerenbecher et Bergot, 2001

Avant d'inclure l'article (Doerenbecher et Bergot, 2001) de la revue *NonLinear Processes in Geophysics*, nous jugeons préférable de tracer les grandes lignes de celui-ci.

Dans une première partie, la théorie de la sensibilité aux observations est présentée en utilisant des notations qui ne sont pas forcément toutes homogènes avec celles du présent mémoire. Cette présentation théorique est ensuite illustrée avec des cartes de sensibilité aux conditions initiales et des représentations graphiques de la sensibilité aux observations. On notera que l'annexe de cet article est très proche de ce qui a été détaillé dans la partie (2.3) de ce mémoire de thèse.

Enfin, on termine avec un examen de l'effet des différentes catégories d'observations (ciblées ou conventionnelles) sur la prévision et la fonction coût  $\mathcal{J}$  utilisée pour ces expériences, grâce aux propriétés du calcul linéaire dont l'approche en sensibilité bénéficie.





## Sensitivity to observations applied to FASTEX cases

A. Doerenbecher and T. Bergot

Météo-France, Centre National de Recherches Météorologiques, Toulouse, France

Received: 15 September 2000 – Revised: 28 February 2001 – Accepted: 17 April 2001

**Abstract.** The concept of targeted observations was implemented during field experiments such as FASTEX, NORPEX or WSRP in order to cope with some predictability problems. The techniques of targeting used at that moment (adjoint-based or ensemble transform methods) lead to quite disappointing results: the efficiency of the additional observations deployed over sensitive areas did not turn out to remain consistent from one case to another. The influence of targeted observations on the forecasts could sometimes consist of strong improvements, or sometimes strong degradations. It turns out that the latter failure explains why the concept of optimal sampling arose. The efficiency of adaptive sampling appears to depend on the assimilation scheme that deals with the observations. It is then very useful to integrate the nature of the assimilation algorithm, as well as the deployment of the conventional network of observations (redundancy issues between targeted and conventional network) in the definition of the sensitive pattern to be sampled. Therefore, we chose the tool of the sensitivity to observations to allow us to test such an approach. The sensitivity to targeted observations (that utilizes the adjoint of the linearized NWP model and the adjoint of the assimilation operator) seems to be a suitable tool to obtain an insight into the tricky issue of the optimization of the sampling strategies.

To understand better the intrinsic patterns and the influence of the 3D-Var assimilation scheme on the sensitive structures to be sampled, we present here some detailed results on a FASTEX targeting case. We focus on the dropsondes deployed by the Gulfstream IV (jet-aircraft) along its first flight during Intense Observing Period 17 that started on the 17 February 1997. The sensitivity to observation is used as a diagnostic tool for studying targeting from a critical point of view. It is shown that assimilation processes can have an important effect on the classical sensitivity fields, and particularly on their vertical extension. For example, in the studied case, the classical sensitivity fields remain at a lower level than 400 hPa, whereas the sensitivity to observations

stretches up to 250 hPa. However, the maximum values can be found at approximately 700 hPa in both sensitivity fields.

The studied case shows that the efficiency of observations depends not only on the sensitivity but also on the deviations between the observations and the background field. An example of the use of this diagnosis for comparing the relative efficiency of different kinds of observations is also presented. This work points out that it is very complicated to optimize the efficiency of adaptive observations, and that the assimilation of an entire set of observations (both conventional and adaptive network) needs to be considered.

### 1 Introduction

Despite numerous advances in the domain of numerical weather forecasting (improvement in data assimilation schemes and improvement in numerical models) during the past few years, the forecast of some meteorological events (like rapid cyclogenesis) remains a difficult problem. Since these meteorological situations have often tragic socio-economic consequences, it is crucial to produce an accurate forecast of such events. These forecast errors partly result from inaccuracies in the initial conditions. These inaccuracies are a consequence either of the errors in the observations and in the background field, or of the inhomogeneous observation network, or of approximations made in the assimilation scheme used for interpolating observations and for producing initial conditions.

In order to try to improve the forecasting of such events, a new observational strategy has been proposed. The purpose was to add so-called adaptive or targeted observations to the conventional observing network in order to control the growth of forecast errors (Emanuel et al., 1995; Snyder, 1996). This observational network is adaptive in the sense that the location of these measurements varies from day-to-day (in opposition to the quasi-permanent conventional network of observations). This strategy was tested during recent field experiments: FASTEX (Joly et al., 1999), NORPEX

(Langland et al., 1999), and WSRP (Szunyogh et al., 2000). The results from these field experiments show that the inclusion of targeted data can significantly improve the forecast in some cases. However, a large case to case variability exists, and it seems that the efficiency of targeted observations depends on numerous parameters (Bergot, 1999). One of the most important parameters is the assimilation scheme used for producing initial conditions. In fact, targeted observations have to go through the assimilation scheme, together with conventional data, to produce initial conditions, and their efficiency is strongly related to the accuracy of such data assimilation processes (Bergot, 2001; Bishop et al., 2001; Morss, 1999).

Sampling strategies, as tested during FASTEX, NORPEX or WSRP, do not appear to be optimal in the sense that there is no explicit care about redundancy (between targeted and conventional observations) and that the number, the nature, and the deployment of those adaptive observations do not guaranty a maximum improvement on the subsequent forecasts at the lowest cost. Further progress in targeting should consider such issues. Moreover, the effectiveness of the sampling of the sensitive area appears to depend on the assimilation scheme (Bergot, 2001). Therefore, it seems essential to include the effects of the assimilation processes in the way adaptive observations are defined (number, observed parameter, deployment). In this way, Baker and Daley (2000) have explored, in an idealized context, a new approach called *sensitivity with respect to observations*, hereafter called sensitivities to observations. These sensitivities to observations are defined in observation space, and point out the observations in which a given forecast aspect is sensitive. This tool makes it possible to highlight the effect of the assimilation scheme on adjoint-based sensitivity patterns. One of the advantages of sensitivity to observations is that it takes into account the existing conventional observations, as well as the way the targeted and conventional observations are assimilated.

The goal of this article is to illustrate the added value of sensitivity to observations with respect to classical sensitivity fields for real FASTEX targeted flights, and to explore the potential use of sensitivity to observations in the context of adaptive observations.

## 2 Sensitivity to observations: principle

The general theoretical principles of the sensitivity to observations are recalled here, and a more detailed formalism can be found in Baker and Daley (2000) or Doerenbecher and Bergot (2001, currently in progress). The sensitivity to observations will be applied within a variational assimilation context, and the notations are following Ide et al. (1997).

Let  $\mathbf{x}_a(t)$  be the state vector, defined at time  $t$ , and called analysis. It is the output from the assimilation process which summarizes the information from all observations,  $\mathbf{y}(t)$ , and from the background field,  $\mathbf{x}_b(t)$ . Let  $t_0$  be the initialization time, and  $t_1$  be the final (or “verification”) time at which a forecast aspect  $S[\mathbf{x}_f(t_1)] = S[\mathcal{M}\mathbf{x}_a(t_0)]$  is computed,

and let  $\mathbf{M}$  be the linear approximation (or “tangent linear model”) of the weather forecast model  $\mathcal{M}$ . Following the first order expansion of  $S$ , and following the definition of the adjoint model,  $\mathbf{M}^T$ , the sensitivity with respect to initial conditions,  $\nabla_{\mathbf{x}}S$ , is given by (see Rabier et al. (1996) or Errico (1997) for more details)

$$\nabla_{\mathbf{x}}S = \mathbf{M}^T \partial S / \partial \mathbf{x}(t_1). \quad (1)$$

From the assimilation point of view, the initial conditions,  $\mathbf{x}_a(t_0)$ , are related to the background field,  $\mathbf{x}_b(t_0)$ , and to the observations,  $\mathbf{y}(t_0)$ , by (see Ghil and Malanotte-Rizzoli (1991) or Lorenc et al. (1986) for more details)

$$\mathbf{x}_a(t_0) = \mathbf{x}_b(t_0) + \mathbf{K} \left[ \mathbf{y}(t_0) - \mathcal{H}(\mathbf{x}_b(t_0)) \right] \quad (2)$$

where  $\mathcal{H}$  is the so-called observation operator which interpolates from model variables to observation points.  $\mathbf{K}$  stands for the assimilation gain operator which combines the background error covariance matrix  $\mathbf{B}$ , the observation error covariance matrix  $\mathbf{R}$ , and the linearized observation operator  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{K} = (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}. \quad (3)$$

From a practical point of view, it should be noted that inverse matrix  $(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} = \mathbf{A}$  represents the so-called analysis error covariance matrix that depends on time  $t$ . In the context of adaptive observations, one generally considers the observational network to be composed of conventional observations (noted with a subscript  $c$  in the following equations), and of a targeted component (noted with a subscript  $t$  in the following equations). If errors in targeted observations are uncorrelated with errors in the conventional observations, the observation error covariance matrix,  $\mathbf{R}$ , corresponding to the whole network (noted with subscript  $ct$  in the following equations) can be written as

$$\mathbf{R}_{ct} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_c & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_t \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Likewise, the observation operator should be detailed according to the conventional and targeted observation systems, and  $\mathbf{H}_{ct}$  can be written  $[\mathbf{H}_c \mathbf{H}_t]$ ; it corresponds to a specific ordering of observed data according to type. Following this idea, one may write the sensitivity to conventional observations,  $\nabla_{\mathbf{y}_c}S$ , and the sensitivity to targeted observations,  $\nabla_{\mathbf{y}_t}S$ , as

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{y}_c}S \\ \nabla_{\mathbf{y}_t}S \end{bmatrix} &= \mathbf{K}_{ct}^T \nabla_{\mathbf{x}}S = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{ct} \mathbf{H}_c^T \mathbf{R}_c^{-1})^T \\ (\mathbf{A}_{ct} \mathbf{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1})^T \end{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}S \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{H}_c \mathbf{A}_{ct} \nabla_{\mathbf{x}}S \\ \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{H}_t \mathbf{A}_{ct} \nabla_{\mathbf{x}}S \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

where  $\mathbf{A}_{ct}$  is the analysis covariance error defined for both the conventional and the targeted networks; it is worth recalling here that  $\mathbf{A}$ , as well as  $\mathbf{B}$ , and  $\mathbf{R}$ , are self-adjoint ( $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$  and  $\mathbf{R}^{-T} = \mathbf{R}^{-1}$ ), so the superscript  $T$  does not necessarily appear, such as in the right-hand side terms of Eq. (5). In those equations, the step that corresponds to

the calculation of the classical sensitivity to initial conditions clearly appears. The effect of the assimilation scheme and of the conventional observations simultaneous to the adaptive ones is mainly contained in  $\mathbf{A}_{ct}$ . It is the keystone of this sensitivity approach.

Most of the current assimilation schemes are based on the variational method in which the analysis state is defined as the minimum of a cost function. This means that the analysis error covariance matrix  $\mathbf{A}$  is not computed during the minimization. Nevertheless, such information is required for the calculation of the sensitivity to observations. In fact, we do not need to know the actual matrix of the variance-covariance of the analysis errors. What is needed is a projection of this matrix along the sensitivity to initial conditions  $\nabla_{\mathbf{x}}S$ . The 3D-Var assimilation scheme does not give any information about  $\mathbf{A}$ , however, several methods exist for obtaining an estimate of it (Fisher and Courtier, 1995). Following this work, Doerenbecher and Bergot (2001, currently in progress) showed how to obtain an accurate estimate of this matrix in the unstable direction of the sensitivity in an operational 3D-Var context. This method is applied here in the French operational weather forecast ARPEGE model (Courtier et al., 1991).

### 3 Application to FASTEX cases

#### 3.1 FASTEX framework

A systematic survey of FASTEX targeted flights with 3D-Var and 4D-Var assimilation systems (Bergot, 1999, 2001) demonstrated that the improvement of the forecasts is strongly case to case dependent. Moreover, these two studies and other studies based on simulated observations (Bergot et al., 1999; Bishop et al., 2001; Morss, 1999) described some difficulties in sampling and analyzing sensitive areas. In this sense, the sampling strategies of sensitive areas, as tested during FASTEX, do not appear to be optimal. Here, “optimal” means that the deployment of adaptive observations has to ensure a maximum improvement of the forecast with a minimum number of suitable dropsondes. Such observations consist of temperature, and wind and humidity measurements. FASTEX provides the first opportunity for examining the impact of targeted observations in an operational context, and numerous targeted observations are available (see FASTEX home page: <http://www.cnrm.meteo.fr/fastex/>). The data collected during this campaign can be useful for better understanding a posteriori why targeting implemented at that time did not produce the expected strong impact.

The sensitivity to observations is used here in a purely diagnostic mode (i.e. once the observations have been made). As shown hereafter, this approach can provide a powerful tool to obtain an insight on how targeted observations will influence forecast quality.

#### 3.2 Application to FASTEX IOP17

##### 3.2.1 Meteorological context and data set

The FASTEX IOP17 (Intensive Observing Period) case was an example of explosive cyclogenesis, with a strong deepening rate of 40 hPa in 24 hours, and with the lowest central pressure (943 hPa at 00:00 UTC on the 20 February 1997) ever observed during FASTEX. A synoptic description of this IOP is given in Cammas et al. (1999).

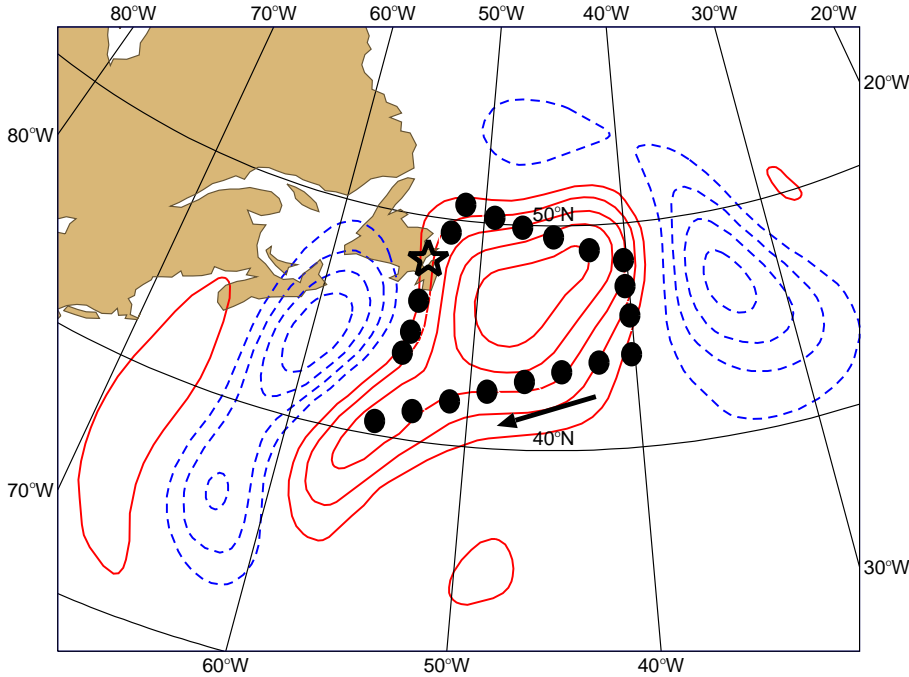
A NOAA Gulfstream IV (hereafter GIV) flight mainly had a targeting goal in the earlier stage of the development of the cyclone (take off at 15:00 UTC and landing at 20:00 UTC on the 17 February 1997). Twenty dropsondes were deployed (see Fig. 1) inside the target area defined from the sensitivity fields which were operationally computed by both Météo-France and the Naval Research Laboratory. In the first part of the flight (northern and eastern legs of the flight), the sondes were released below 350 hPa, while along the southern flight track, the dropsondes were launched from above the tropopause, near 150 hPa.

##### 3.2.2 Sensitivity fields

In a first step, the classical sensitivity to initial conditions is computed as during FASTEX: the forecast aspect  $S$  is the enstrophy of the forecast  $\mathbf{x}_f(t_1)$ , vertically integrated between 950 and 790 hPa, and horizontally averaged over a verification area centered on the studied low ( $60^\circ\text{N}$ – $45^\circ\text{S}$  and  $15^\circ\text{W}$ – $0^\circ\text{W}$ ). Using the French NWP ARPEGE model, the sensitivity is then computed with respect to the control variables, namely temperature, humidity, divergence, and vorticity. The assimilation scheme used is 3D-Var. The targeting time  $t_0$  (17 February 1997 at 18Z) corresponds to the analysis  $\mathbf{x}_a(t_0)$ , to the first guess  $\mathbf{x}_b(t_0)$  and to the observations  $\mathbf{y}_{ct}$ . The forecasted trajectory is performed over 42 hours, so that the verifying time  $t_1$  corresponds to the 19 February at 12:00 UTC. This range defines the optimization time for the classical gradient to initial conditions  $\nabla_{\mathbf{x}}S$ .

The computation of the sensitivity field is similar to what was done during FASTEX. However, it should be noted that the sensitivity calculations are based on the trajectory issued from the analyzed initial conditions at targeting time  $t_0$ . This is a major difference between the diagnostic context used here and the operational one, in which the trajectory was necessarily computed from some forecast initiated well before the targeting time. However, for the studied case, the use of either a diagnostic or an operational based trajectory does not lead to many differences inside the location of sensitive areas.

The classical sensitivity to initial conditions,  $\nabla_{\mathbf{x}}S$ , is computed as detailed above, and is compared to the sensitivity to targeted observations,  $\nabla_{\mathbf{y}_t}S$ . This comparison allows us to better understand the influence of the assimilation processes on the sensitivity fields. Figures 2a, 3a, and 4a show the sensitivity to initial conditions projected onto the targeted observation space,  $\mathbf{H}_t\nabla_{\mathbf{x}}S$ , for the  $T$ ,  $U$  and  $V$  observed param-



**Fig. 1.** Gulfstream IV flight for the IOP17, 15:00 UTC–20:00 UTC on 17 February 1997. Black dots indicate the dropsonde positions. The solid arrow indicates the direction of the flight and the star indicates the location of the takeoff and landing at St-Johns, Newfoundland. The classical sensitivity field to initial conditions of temperature at 700 hPa, as defined during FASTEX, is plotted as a background.

eters. These sensitivity fields are plotted as cross-sections along the flight: the vertical axis represents the pressure level of the measurement, and the dropsonde locations are plotted in the horizontal axis, according to their distance. It is worth recalling that  $\mathbf{H}_t \nabla_{\mathbf{x}} S$  and  $\nabla_{\mathbf{y}t} S$  are defined in the observation space and that sensitivity values are computed at observation points. This implies some difficulties for a suitable graphical representation. In the following figures, values on observation space were interpolated in order to be able to draw a set of isolines. This graphical choice allows one to clearly depict the patterns of sensitivity. One can notice strong sensitivity to initial conditions in the northern and eastern part of the flight, for both temperature and wind. The maximum of sensitivity is located at a low level, around 700 hPa, for the dropsonde #5 in the case of temperature, and for the dropsonde #6 in the case of the  $U$ -wind and  $V$ -wind.

Figures 2b, 3b, and 4b show the sensitivity with respect to observations,  $\nabla_{\mathbf{y}t} S$ , for temperature,  $U$ -wind and  $V$ -wind. As previously explained, these sensitivity fields are plotted as cross-sections along the flight. Both  $\nabla_{\mathbf{x}} S$  and  $\nabla_{\mathbf{y}t} S$  exhibit high values in the northern part of the flight. The maximum sensitivity to observations for temperature is always located at the dropsonde #5 near 700 hPa. The assimilation processes have a weak effect on the location of these strong sensitivities. A comparison of Fig. 2a and Fig. 2b shows that the major difference between the patterns of sensitivity to initial conditions and sensitivity to observations is their vertical extension. While  $\nabla_{\mathbf{x}} S$  remains mostly confined in the lowest levels of the atmosphere (below 500 hPa),  $\nabla_{\mathbf{y}t} S$  extends throughout the whole atmosphere. This is also clear for  $U$ -wind (Fig. 3a and Fig. 3b). This increase in the vertical extension of the sensitivity field is a consequence of the ver-

tical structure functions (vertical correlations) used in the assimilation (see Appendix A). The same remark can be made when the classical sensitivity to initial condition (Fig. 4a) is compared to the sensitivity with respect to the  $V$ -wind observations (Fig. 4b). In the first case, the maximum sensitivity remains at a level lower than 650 hPa. Although strongest sensitivities are found at lower levels, when both  $\nabla_{\mathbf{y}t} S$  and  $\nabla_{\mathbf{x}} S$  are examined, significant values of  $\nabla_{\mathbf{y}t} S$  can appear up to 350 hPa, due to the vertical spreading of  $\nabla_{\mathbf{x}} S$ .

As shown in Thépaut et al. (1996), structure functions can easily be illustrated by single observation assimilation experiments. Therefore, such an experiment has been performed to illustrate the former point using a single wind observation at 600 hPa. In this specific case, the increment represents the structure function associated with the simulated observed parameter. The structure function can be associated with a column of the matrix  $\mathbf{A}$ . It describes the covariances between a given model parameter (or the closest to the observed parameter) with all other parameters. Such a single observation experiment allows one to obtain an insight into a *slice* of  $\mathbf{A}$ .

The corresponding final increment, plotted in Fig. 5, exhibits a classical barotropic structure, keeping in mind that the 3D-Var assimilation scheme is used here. Moreover, one can notice the strong vertical correlation between the wind at the observed level and the surrounding wind field: for one observation located at 600 hPa, the depth over which the increment is higher than half of the increment at 600 hPa is at about 650 hPa. For the FASTEX case detailed in this section, the inclusion of the assimilation processes in the sensitivity approach leads to some significant changes in the sensitivity patterns. If the classical sensitivity is confined below 500 hPa (the highest significant sensitivity maximum is lo-

cated at 600 hPa in the northern part of the flight), the sensitivity to targeted observations exhibits a strong extremum at 600 hPa, but also local extrema at levels as high as 300 hPa. The latter clearly appears for the dropsonde #15 for all parameters, especially temperature. This vertical stretching of sensitivity is interpreted as the effect of the structure functions described in operator  $\mathbf{A}_{ct}$  (see the Appendix A for more details).

These results suggest that the assimilation scheme can have a strong influence on the structure of the sensitivity fields, and particularly on the vertical extension of the sensitive area.

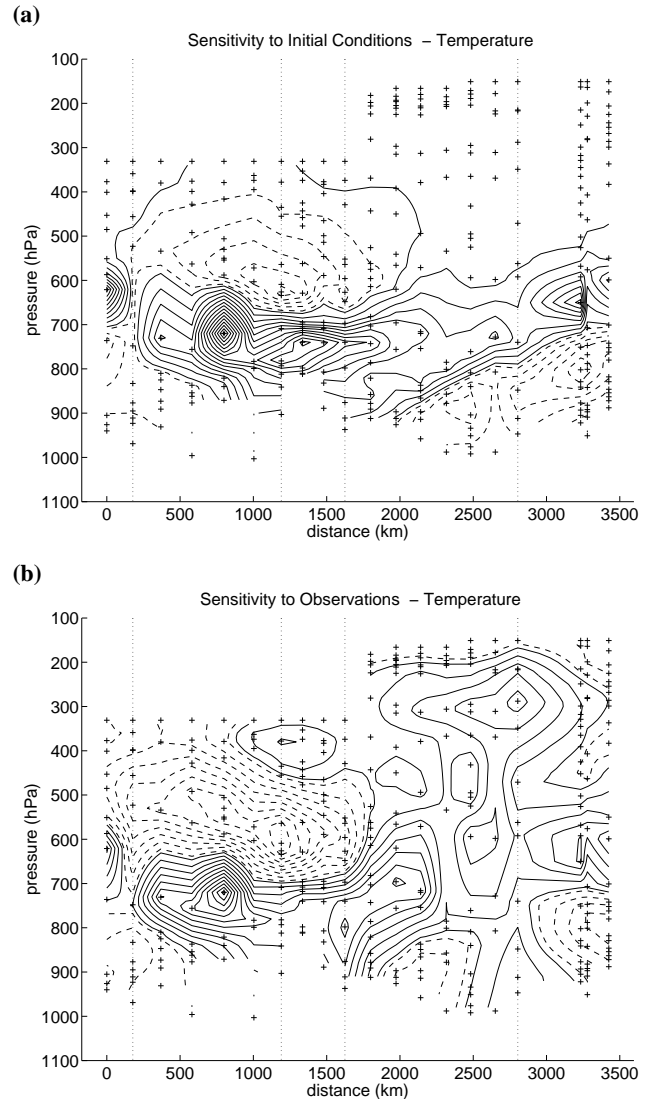
### 3.2.3 Impact of targeted observations

The actual impact of targeted observations depends not only on the sensitivity fields,  $\nabla_{\mathbf{y}_t} S$ , but also on the amplitude of the innovation vector,  $\mathbf{y}_t - \mathcal{H}_t[\mathbf{x}_b(t_0)]$ . For example, if the observed value is similar to the background value, then the impact will be small, even if the observation is located inside an area of strong sensitivity. To study this point, we focus here on the so-called impact function which is directly derived from the definition of sensitivity, as in Rabier et al. (1996). In our particular case, the perturbation is defined as the innovation vector,  $\mathbf{y}_t - \mathcal{H}_t[\mathbf{x}_b(t_0)]$ , and the linear estimate of the variation of the forecast aspect  $S$  is given by

$$\delta S_o = (\nabla_{\mathbf{y}_o} S)^T [\mathbf{y}_o - \mathcal{H}_o(\mathbf{x}_b(t_0))] \quad (6)$$

where subscript “ $o$ ” denotes a given type of observation. With such a computation based on the linear hypothesis, we directly obtain an estimate of the influence of a given kind of observation on the forecast aspect  $S$ . This impact depicts the actual influence of each observation, or group of observations, on the analysis and the subsequent forecast, as soon as they become part of the whole observational network.

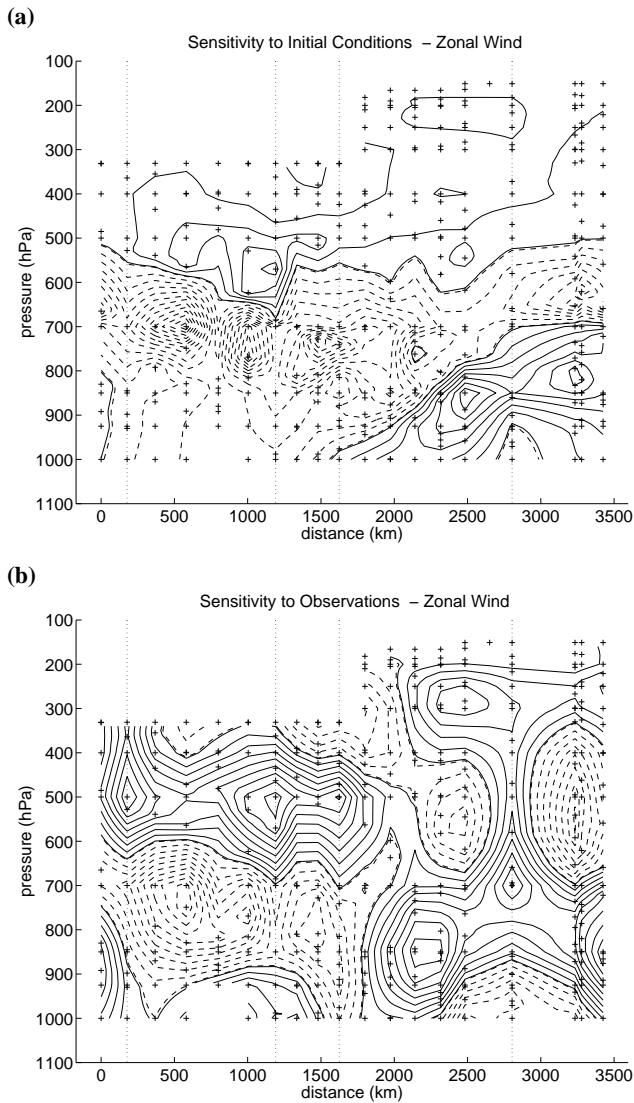
Using the same graphical conventions as in Fig. 2, Fig. 6 shows the contribution from each temperature observation (Fig. 6a), and from each wind (combined  $U$  and  $V$  components) observation (Fig. 6b). The respective contributions from each wind component to the impact function are given in Figs. 7a and 7b, respectively. This impact combines the signs of the innovation and of the sensitivities to targeted observations. It points out small structures that contribute sometime in an opposite manner, even for nearby measurements, to the variation  $\delta S$ . In spite of some organized tilted structures that could be detected in the innovation (not shown), their combination with the sensitivity to the observations produces small-scale patterns, especially in the southern part of the flight. In the northern part, we detect a tilted structure. This is particularly noticeable for the temperature in Fig. 6a with a quite uniform field below it and strong contributions above it, but within a thin layer. Such opposite local contributions which can be found on the vertical of a given dropsonde may cancel out when the total contribution of that dropsonde to the impact function is considered.



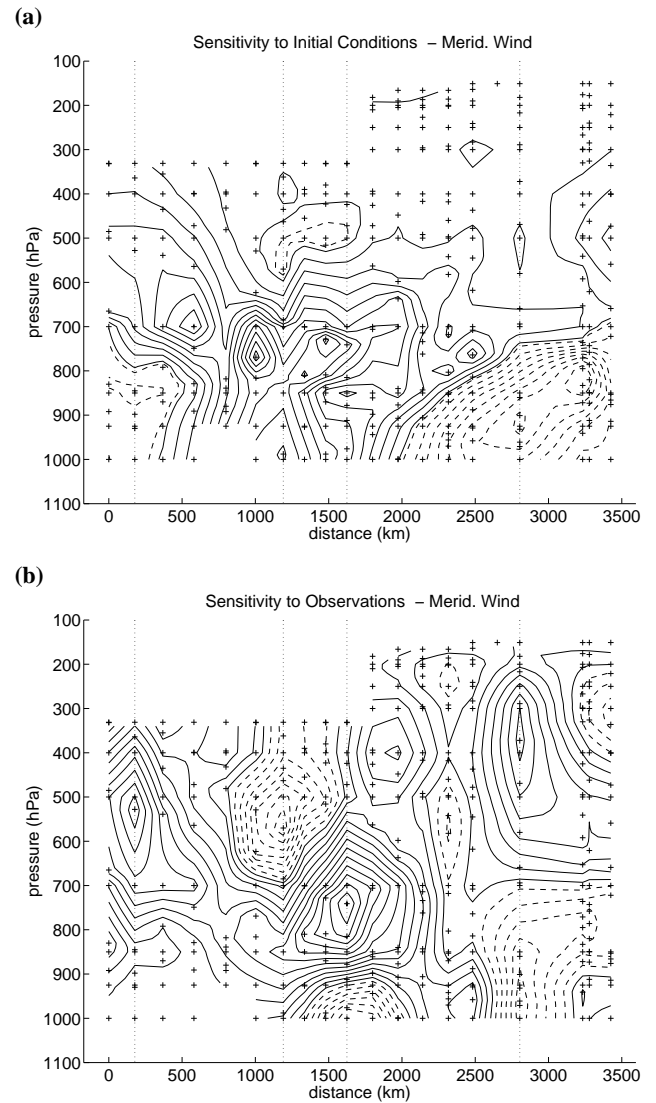
**Fig. 2.** GIV flight for IOP17. Sensitivity with respect to initial conditions, projected onto the temperature observation space (a) and sensitivity with respect to the observations of temperature (b). The vertical axis represents the pressure level of the measurement and the dropsonde locations are plotted in the horizontal axis according to their distance from flight departure point (St-Johns, Newfoundland). The crosses represent the location of the temperature measurements, and the vertical dotted lines represent the changes in direction during the flight.

Due to of the practical implementation of targeting which is achieved by means of dropsondes, it seems quite natural to gather this impact information from each dropsonde by integrating the contributions of each temperature and wind measurement. It then appears that some contributions will compensate each other. Therefore, a given dropsonde will not necessarily have an overall strong contribution if one of its single measurements has a strong impact.

It is then possible to separate the contributions from targeted dropsonde data and from conventional RAOBS data or



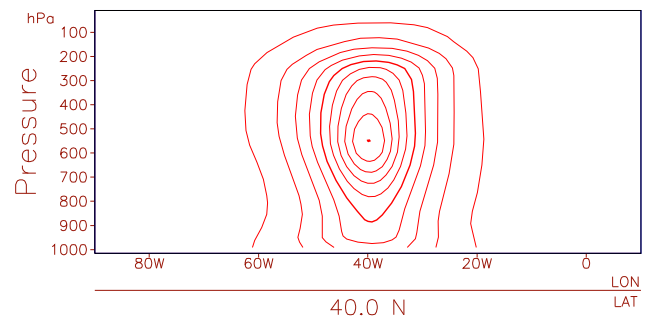
**Fig. 3.** Same as in Fig. 2, but for the observations of  $U$ -wind.



**Fig. 4.** Same as in Fig. 2, but for the observations of  $V$ -wind.

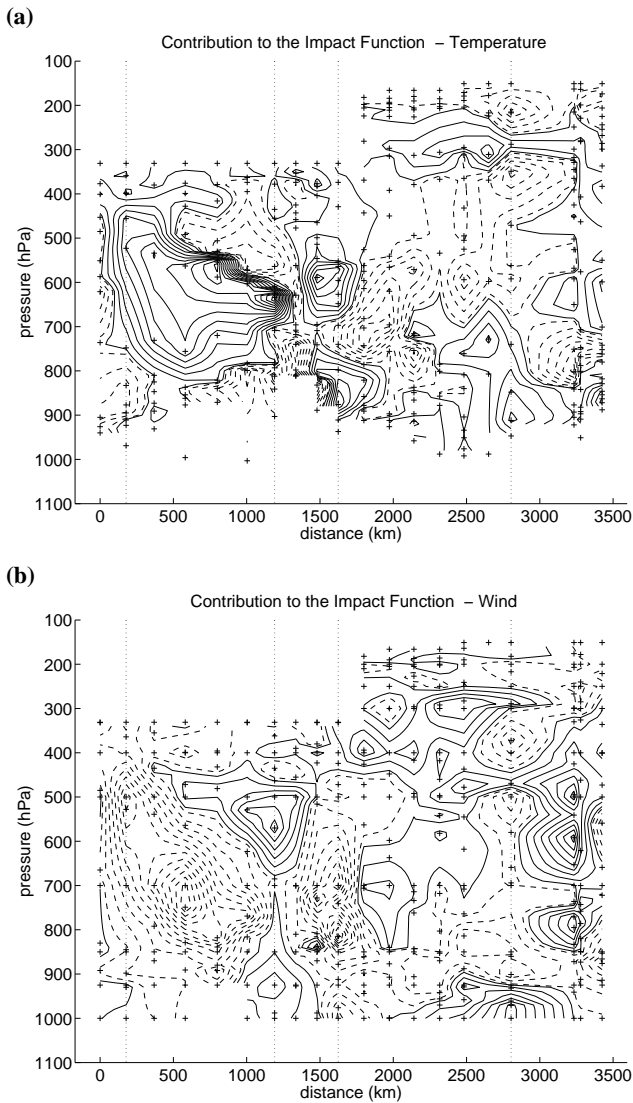
satellite data (SATOBS in this study), and to compare their relative efficiency and influence on the forecast aspect  $S$ . Unfortunately, the innovation vector,  $\mathbf{y}(t) - \mathcal{H}[\mathbf{x}_b(t_0)]$ , and therefore the impact function,  $\delta S$ , can only be known once the observations are made. However, the comparison between the sensitivity and the impact can tell us whether the influence from observations is a consequence of either strong errors in the initial conditions, i.e. large differences between  $\mathbf{y}(t)$  and the background  $\mathbf{x}_b(t_0)$  combined with weak sensitivities, or strong sensitivities despite a weak innovation.

Figure 8a and Fig. 8b show the extremum of the impact function for each dropsounding, in terms of temperature and wind, respectively. Strong impacts are always present in the northern part of the flight, for both temperature and wind. These strong impacts correspond to a strong sensitivity to initial conditions and to observations, as previously shown (see Figs. 2 to 4). For the studied case, one can also notice that the impacts for wind are generally stronger than



**Fig. 5.** Vertical correlation for assimilation of a single wind observation at 600 hPa. The bold line corresponds to half of the maximum value of the wind increments.

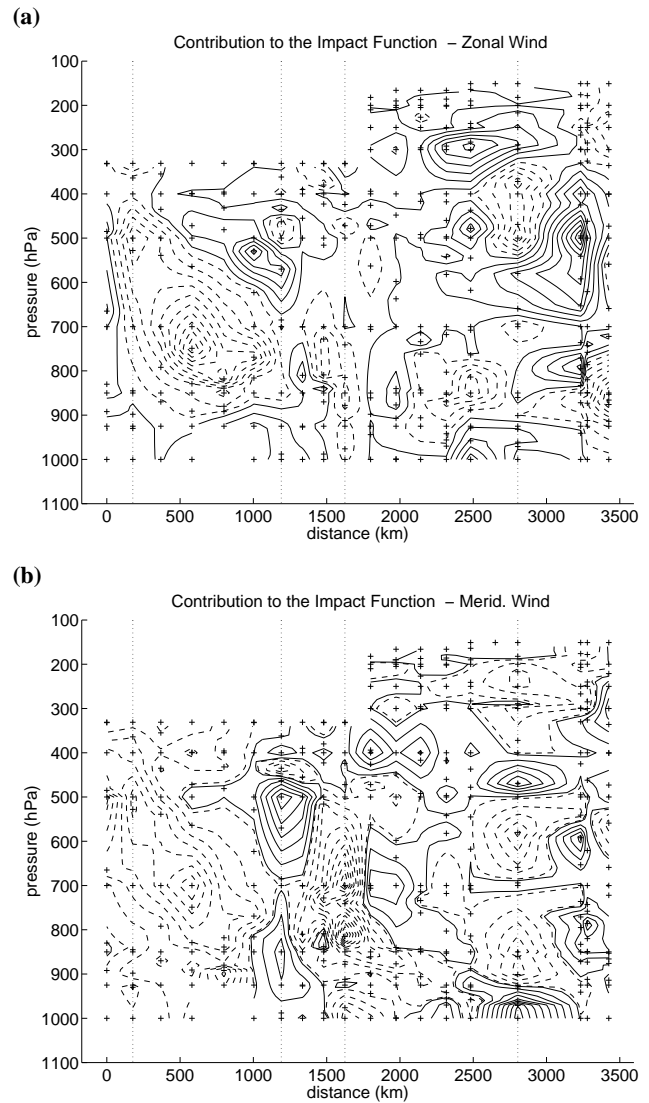
the impacts for temperature, for a given dropsounding. The extremum generally have opposite signs: a decrease of the forecast aspect  $S$  for wind is associated with an increase



**Fig. 6.** Same graphical principle as in Fig. 2, but for the contributions  $\delta S_i$  of each targeted temperature observation (a) and of each targeted couple of wind observations (b).

in  $S$  for temperature. Figure 8b also shows that the impact function exhibits strong extrema in the southeastern part of the flight. Dropsonde #10 does not correspond to any maximum of sensitivity to initial conditions, but sensitivity values remain high, especially at low levels (800–750 hPa) (see Figs. 2 to 4). The examination of the sensitivity to observations clearly suggests that the  $V$ -wind component plays a major role. For dropsonde #10 (Fig. 4b), a maximum of sensitivity is found at 750 hPa. This maximum of  $\nabla_{yt} S$  is embedded in an area with significant negative values of innovation,  $y_t - \mathcal{H}_t[x_b(t_0)]$  (not shown), which produces the strongest  $V$ -wind contribution to  $\delta S$  (Fig. 7b).

When focusing on the whole flight and considering all observed parameters, it appears that most of the strong contributions originate from wind measurements, i.e. the case for dropsonde numbers 2, 4, 10 and 17. The strong contribu-



**Fig. 7.** Same graphical principle as in Fig. 2, but for the contributions  $\delta S_i$  of each  $U$  component of wind targeted observations (a) and of each targeted  $V$  component of wind targeted observations (b).

tions of dropsonde numbers 2, 4 and 10 come from the conjugate effect of both  $U$ -wind and  $V$ -wind based contributions. In the case of the dropsonde #17, it is essentially a  $U$ -wind based contribution; the sensitivity to  $V$ -wind is quite low in this area. As far as temperature is concerned, this parameter plays a role only in the northeastern part of the flight.

The strong impact of dropsonde #4 for wind, and dropsonde #8 for temperature are a consequence of strong discrepancies between the observations and the background field. With the sensitivity to observations being moderately high (relative to its maximum which is located at another observation point), the innovation is responsible for those fairly heavy contributions to  $\delta S$ .

Since we have a good confidence in the targeted observations, those discrepancies can be interpreted as errors in

the background field. Moreover, it is helpful to recall here that the sensitivity never indicates where initial errors are located, and that the size of the errors should also be taken into account. However, it seems that for the studied cases, strong sensitivity is associated with a strong impact (but strong impact is not always associated with strong sensitivity).

The modification of the forecast aspect,  $S$ , due to the inclusion of targeted observations is the vertical summation of elementary impacts from each measurement at each level. To study the efficiency of targeted observations, these summations are plotted in Fig. 8c and Fig. 8d for temperature and wind (both  $U$  and  $V$ -wind), respectively. For the studied case, the efficiency of targeted observations is clearly stronger for wind than for temperature. The wind and temperature impacts have often opposite effects. Figure 9 shows the efficiency of each dropsonde for all measurements and all levels. There is a strong correlation between Fig. 9 and Fig. 8d. This shows, for the selected case, the predominance of wind over temperature measurements in the efficiency of targeted observations. One can also notice that dropsondes can have opposite effects: for example, the northern part of the flight leads to a decrease in  $S$ , while the southwestern part of the flight leads to an increase in it. Even nearby observations can have strong opposite effects. This example illustrates that it is very complicated to study and to optimize the efficiency of targeted observations. Moreover, it has been shown by Bergot (2001) that the influence of targeted flights on the forecasts is characterized by a large spread among cases: strong impacts as well as quite undetectable impacts were identified. In the latter case (weak impact), this characteristic of the flight does not mean that an observation by observation examination would depict any weak contribution for each observation. We can notice some strong opposite contributions to the variation of the impact. In such cases, the effect of the flight itself will be small, as all the contributions of measurements are summed up.

Another advantage of the sensitivity to observations associated with the calculation of the impact is that it can be used for comparing the relative efficiency of different kinds of observations. Figure 10 shows an example for the FASTEX IOP17 case. The targeted observations, plotted as TEMP messages, have the strongest impact, despite their low number (20 dropsondes). This impact is similar to the one from the entire set of conventional observations. This kind of diagnosis allows one to say that the targeted flight for FASTEX IOP17 is relatively efficient (weak number of dropsondes, yet strong impact). Similar results have been obtained by Bergot (2001) and Langland et al. (1999). Figure 10 also demonstrates that different kinds of observations can have opposite effects on the forecast aspect  $S$ . For example, the PILOT observations (measurement of wind) have an effect, in absolute value, similar to the SYNOP observations (surface measurements), but with an opposite sign. Therefore, the PILOT + SYNOP observations have no impact on the forecast aspect, despite relatively large individual contributions. It must be emphasized that the contribution to the impact of a given subset of observations (used for computing the initial conditions

of the forecast) is valid only due to the presence in the analysis of all the other observations: the actual contribution of the subset to the impact will not be equal to the impact obtained if only this subset were used in the assimilation.

#### 4 Conclusions

The recent concept of adaptive observations has been tested during the FASTEX field experiment carried out in January–February 1997. The goal of this concept is to add targeted observations inside sensitive areas in order to locally improve the initial conditions, and therefore the subsequent forecast. Different works have shown that the efficiency of targeted observations depends on numerous parameters, and particularly on the assimilation scheme used. In this way, it seems essential to include the assimilation processes in the definition of adaptive observations.

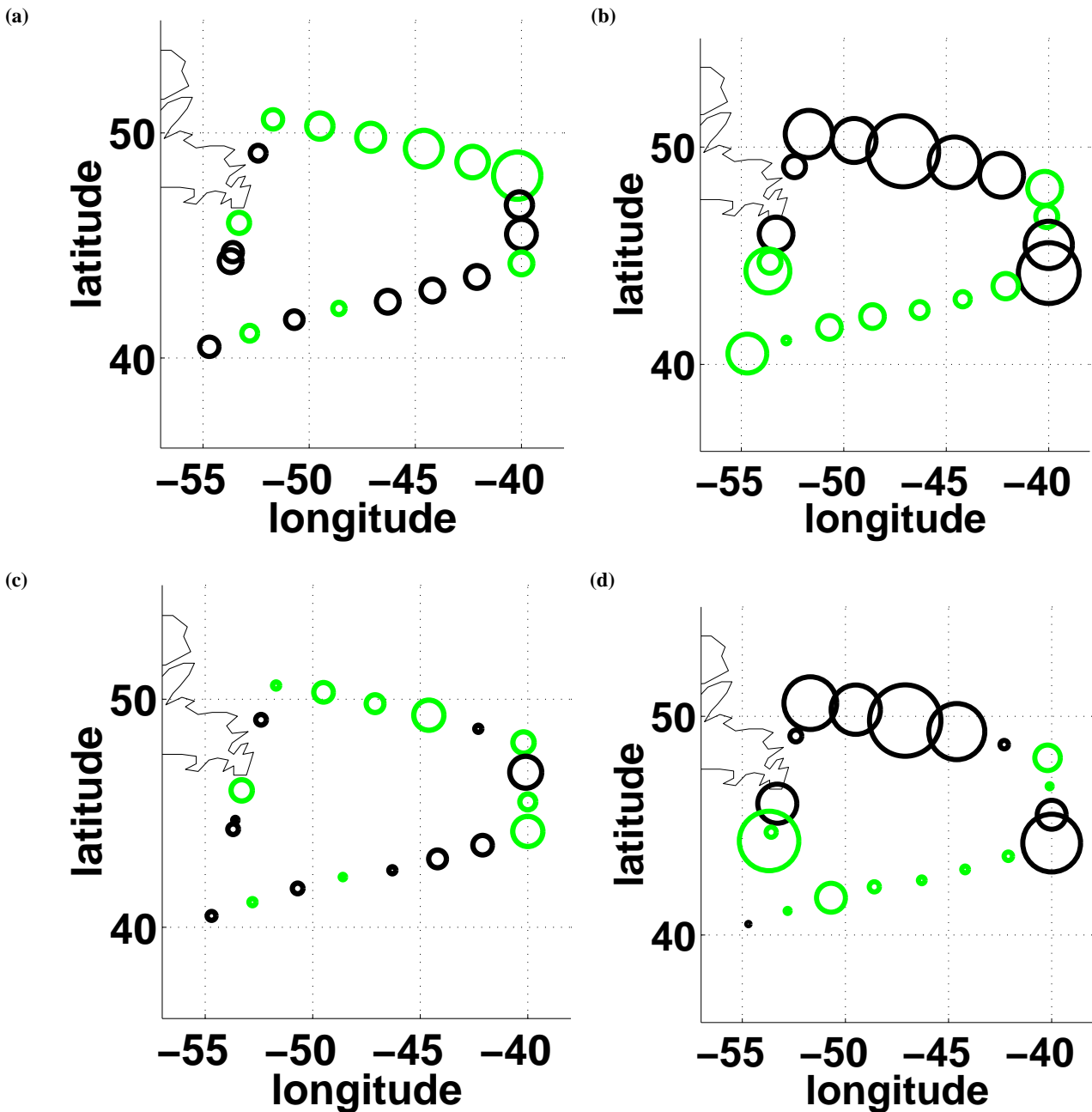
Following the preliminary work of Baker and Daley (2000), the concept of sensitivity to observations has been implemented in the French operational NWP model ARPEGE. The sensitivity to observations is defined in the observation space, and points out the observations to which a given forecast aspect is sensitive. In this study, this new tool is used in a diagnostic way (i.e. once the observations are made) for assessing the efficiency of FASTEX targeted observations for IOP17.

The results demonstrate that the assimilation scheme has a strong influence on the vertical structure of the sensitivity fields, with a significant increase in their vertical extension. This tool is also utilized for comparing the efficiency of different observations, with the calculation of the so-called impact function. This impact function represents the modification of the forecast aspect,  $S$ , due to given observations, under the linear hypothesis. For the studied case, strong sensitivity is generally associated with strong impact. Nevertheless, the contrary is wrong, and strong impact does not always correspond to strong sensitivity.

For this targeted flight, the efficiency of adaptive observations is clearly a consequence of the GPS wind measurements from dropsondes, and the temperature measurements have a weaker effect (about a fifth of the first for the considered  $\delta S$ ). Even nearby observations can have opposite effects on the final variation of the forecast aspect  $S$ . If the gathered contributions of all the observations of a targeted flight result in a weak contribution to the variation of  $\delta S$ , it does not imply that each observation or group of observations have also a weak contribution on itself. This studied case clearly shows that it will be very complicated to optimize a priori (i.e. before the observations are done) the efficiency of targeted observations.

This work advocates the use of sensitivity to observations in order to study the efficiency of observations in an a posteriori context (i.e. once the observations are made). An important question now is to investigate the potential of this tool in a prognostic mode in order to try to optimize the efficiency of targeted observations. What will

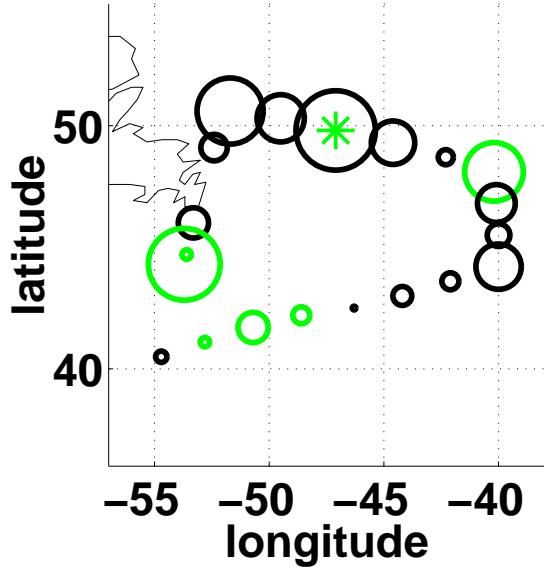




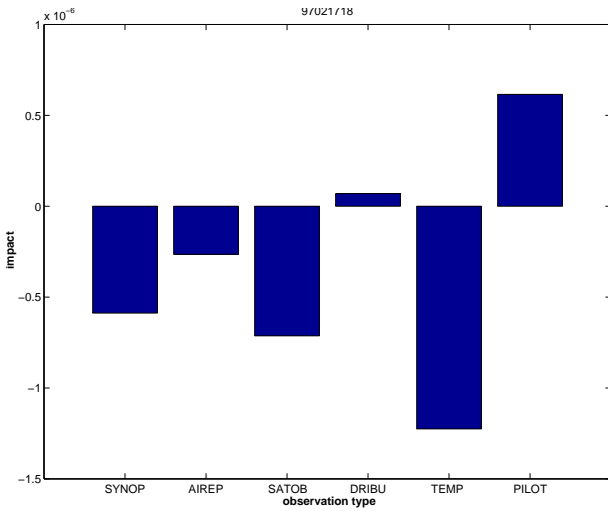
**Fig. 8.** GIV flight for IOP17. Modification of  $S$  by targeted observations. Extremum of these modifications for temperature (a) and wind (b). Vertical integration of these modifications for temperature (c) and wind (d). A given size of the symbols corresponds to similar modifications in Figs. (a)–(b), and in Figs. (c)–(d). The black circles correspond to an increase in  $S$ , and the gray circles to a decrease in  $S$ .

be the most efficient sampling of a sensitive area, given the assimilation scheme used, and given the conventional observation network? There are two major problems for answering such a question. The first problem is related to the unknown size of the innovation vector (difference between the background field and the observations). This work has shown that observations located in a strong sensitivity area have a strong impact. However, observations can have a significant impact, even if they are not located at an extremum of the sensitivity, but embedded in significant

values of the innovation. This clearly implies that not only the sensitivity field should be taken into account, but also the estimated innovation at the observation location. This point will be studied in a future work. The second problem is related to the definition of an optimal sampling of the sensitive area. The optimization of a flight plan will be a complicated problem: one wants to find the matrix  $\mathbf{H}_t$  that maximizes  $\nabla_{y_t} S$ . A suboptimal solution is to find the optimal location of targeted observations in a sequential manner. In this case, one identifies the best location for one targeted



**Fig. 9.** GIV flight for IOP17. Same as in Fig. 8 for the total impact per dropsonde.



**Fig. 10.** GIV flight for IOP17. Modification of the forecast aspect  $S$  for different kinds of observations: SYNOP (surface measurements), AIREP (commercial aircrafts data), SATOB (satellite data), DRIBU (buoy data), TEMP (targeted dropsondes) and PILOT (altitude wind data). The studied data are in a window of 110W/0 and 20N/70N.

observation at a time (the problem becomes in this way a scalar optimization problem). Once this location has been found, one identifies the best location for the next targeted observation, given that all previous targeted observations have been taken into account. This method is very efficient, but is only a suboptimal method. This new tool should be tested under real conditions, for example, during the preliminary phase of the future THORPEX field experiment (The Hemispheric Observing system Research and Predictability EXperiment; <http://box.mmm.ucar.edu/uswrp/field-projects/fieldprojects.html>).

## Appendix A Effect of the covariances

### A1 Formalism

The goal of this appendix is to show the relationship between the vertical extension of the sensitivity to observations and the vertical extent of the error covariances of the background field. We chose to illustrate this point with a few low dimensional examples. But first, it is necessary to clarify a few notations (see also Baker and Daley, 2000).

#### A1.1 Mathematical notations

Prior to any result, we remain the readers of the principle of  $\mathbf{K}^T$  that is used in the computation of the sensitivity to the observations, and which performs a change from model to observation space.

<i>Observation Space</i>	$\xrightarrow{\mathbf{K}}$	<i>Initial Conditions Model Space</i>
$\mathbf{y}$	$\xrightarrow{\mathbf{K}}$	$\mathbf{x}_a$
$\nabla_{\mathbf{y}} S$	$\xleftarrow{\mathbf{K}^T}$	$\nabla_{\mathbf{x}} S$
	$\mathbf{A}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}$	
	$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{A}$	

Moreover, it is worth recalling that  $\mathbf{A}$  can be calculated following two equivalent formulae:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \\ &= \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

Let us consider the state vector  $\mathbf{x}$  of the model we choose to work with. Let  $m$  be its dimension.  $\mathbf{x}$  can be written as:

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i \ \dots \ x_m]^T. \quad (\text{A2})$$

From a similar point of view, let us consider the observation vector  $\mathbf{y}$  with dimension  $n$ . Practically, with the NWP model,  $n$  is smaller than  $m$ :

$$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_k \ \dots \ y_n]^T. \quad (\text{A3})$$

$\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$  are both  $m \times m$  symmetric matrices.  $\mathbf{R}$  is a  $n \times n$  matrix which we assure to be diagonal. This hypothesis is quite a strong one: the measurement errors are supposed to be uncorrelated between each other, even if the same dropsonde is used to perform them. This hypothesis is no longer valid for satellite observations because errors in observations performed by a given satellite are well-known to be correlated. Moreover, this assumption of independence between observation errors is particularly true between distinct observation types or platforms. However, we allow the variances of observation errors to vary according to the location and the type of observation. This agrees with the reality: the same dropsonde is considered to provide less accurate measurements (higher variances of the errors) at the top and bottom of the atmosphere than at mid-levels. In other words,

and as it is done in the operational assimilation scheme, the observations errors are uncorrelated and  $\mathbf{R}$  is kept diagonal.

Let  $a_{ij}$  and  $b_{ij}$  be the components corresponding to the  $i^{th}$  column and the  $j^{th}$  line of  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$ , respectively.  $\sigma_k^o$  is the  $k^{th}$  element of the diagonal of  $\mathbf{R}$ .

### A1.2 The simplified context

To give a more meteorological meaning to the cases studied here, we will perform some numerical calculations within a simplified context. The different components or parameters,  $x_j$  of the model state vector  $\mathbf{x}$ , correspond to the different levels ( $m$  levels) of the atmosphere. Practically, we take  $m$  to be 50. In our experiments, we test different formulations of the operators that are used in Eq. (A1.1) to show the effect of the structure functions depicted by  $\mathbf{B}$  in the sensitivity computations from different points of view. Two different kinds of variance and covariance descriptions for the errors of background and observations are used. The first one depicts a simplified situation in which the covariances of the background errors are parameterized by a decreasing exponential function of the distance between the model levels. The range of the decrease of the covariances as well as the variance of the background errors remains constant, and equal to one at all levels. The variances of the observation errors are equal to 1. This configuration is named “flat” hereafter. In the second one, called a “curved” configuration, we consider a slightly more complicated matrix  $\mathbf{B}$ . The covariances follow an exponential function as before, but the variances of the background errors vary according to the level, following a quadratic formulation (the variance is greater near the ground and aloft than at mid-levels).

### A2 Identical model and observation space

This case does not need to be illustrated with numerical results. We will only use a mathematical formalism. Let us consider that each model grid point is an observation point. In this particular case, let us consider that the interpolation scheme is the identity ( $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ ). Using the fact that  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{R}$  are self-adjoint, we have the following property:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{-1} \quad (\text{A4})$$

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{R}^{-T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{K}. \quad (\text{A5})$$

It can be noted that the fact that  $\mathbf{R}$  is a diagonal matrix implies that it can be permuted with  $\mathbf{A}$ .

$\mathbf{K}$  and  $\mathbf{K}^T$  correspond to the same operator; the effect of the structure functions contained in them is then identical, and the effect of  $\mathbf{K}$  on the innovation (in the forward analysis process) is the same as the effect of  $\mathbf{K}^T$  on the computation of the sensitivity to observations.

### A3 Single observation case without interpolation

Now let us consider a single observation measurement which is performed at the location of a model grid-point  $i$ . First, we

assume that the interpolation scheme is very simple:

$$\mathbf{H} = [0 \dots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1} 0 \dots 0]. \quad (\text{A6})$$

This means that the information contained in the observation is only transferred to the grid-point  $i$ . Using the second formulation of  $\mathbf{A}$  (Eq. A1), this configuration of observations leads to the following expression for the component of  $\mathbf{A}$ :

$$[a_{jk}] = \left[ b_{jk} - \frac{b_{ji} \cdot b_{ik}}{\sigma_i^o + b_{ii}} \right]. \quad (\text{A7})$$

### A3.1 Forward case: analysis of this single observation

Let  $\mathbf{d}$  be the innovation vector, i.e.  $\mathbf{d} = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b)$ . The analyzed field is given by  $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{A}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{d}$ . Given the formulation of  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{d}$  simplifies to its single component:  $\mathbf{d} = d_i = y_i - [\mathbf{x}_b]_i$ , and the assimilation of this single observation leads to the following analysis increment ( $\delta\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ ):

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}_a &= \left[ \left( b_{ik} - \frac{b_{ii} \cdot b_{ik}}{\sigma_i^o + b_{ii}} \right) \frac{\mathbf{d}}{\sigma_i^o} \right]_{k=1,m} \\ &= \left[ \frac{\mathbf{d}}{\sigma_i^o + b_{ii}} b_{ik} \right]_{k=1,m}. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

Considering that  $\mathbf{d}/\sigma_i^o + b_{ii}$  is a normalization factor ( $i$  is defined as the observation position in  $\mathbf{H}$ ),  $\delta\mathbf{x}_a$  appears to be the  $i^{th}$  column of  $\mathbf{B}$  (i.e.  $[b_{ik}]_{k=1,m}$ ), weighted by  $\mathbf{d}/(\sigma_i^o + b_{ii})$ .

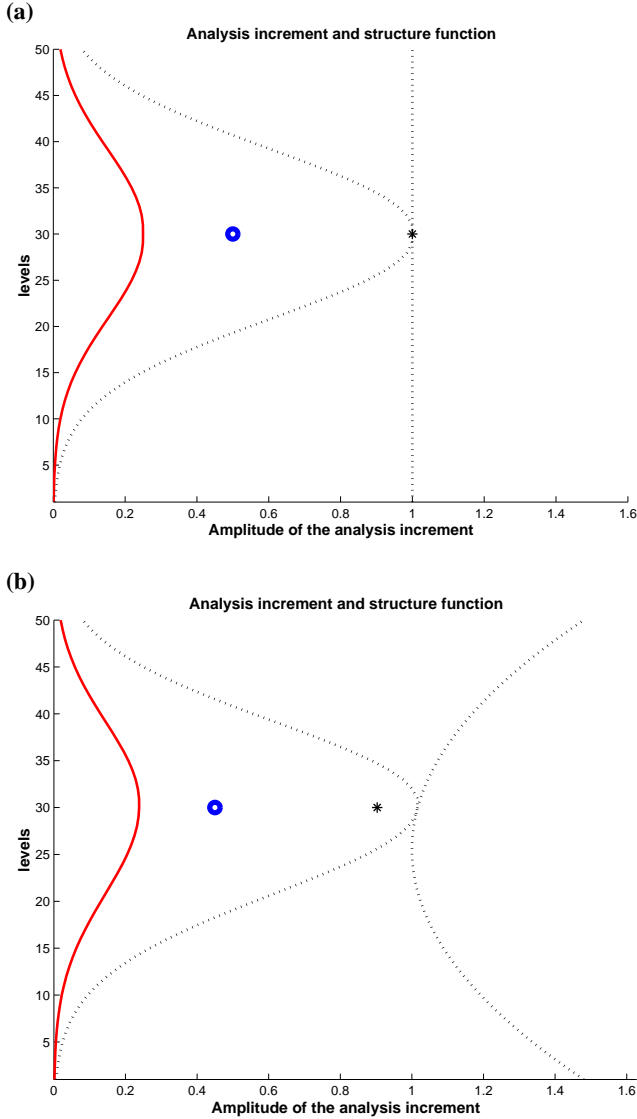
The single observation is simulated at the thirtieth level with a measurement that makes the innovation be equal to half of the standard deviation of the observation error:  $\mathbf{d} = \sigma^o/2$ . Figure A1 shows the analysis increment (bold line) for both a “flat” formulation (a) and a “curved” formulation (b). For the values of the statistics used in this experiment, we find the maximum increment to be  $1/4$ , as it can be estimated from the Eq. (A8) with  $k = 30$ ,  $\sigma^o = b_{kk} = 1$  and  $\mathbf{d} = 1/2$ . As explained in the main part of the paper in this single observation context, the analysis increment (bold curve in Fig. A1 represents the structure function associated with the assimilation scheme used.

### A3.2 Sensitivity to a single observation

Now let us focus on the adjoint problem of the assimilation of a single observation. First of all, we recall hereafter the formula that gives the sensitivity of a forecast aspect  $S$  to the observations:

$$\nabla_{\mathbf{y}} S = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}} S \quad (\text{A9})$$

where  $\nabla_{\mathbf{x}} S$  is the sensitivity of  $S$  to the initial conditions of the forecast (namely  $\mathbf{x}_a$ ). Let  $[g_k]$  be the  $k^{th}$  component of  $\nabla_{\mathbf{x}} S = [g_k]_{k=1,m}$ . For a single observation experiment, the



**Fig. A1.** Increment of assimilation for the “flat” formulation (a) and the “curved” formulation (b). The circle shows the value of the innovation vector  $\mathbf{d}$  and location of the single observation in the column of atmosphere. The bold curve shows the analysis increment corresponding to the assimilation of this single observation. The dotted line on the left shows the covariances of the background observed parameter with all the other model parameters  $b_{ij}$ . The dotted line on the right shows the variances  $b_{ii}$  on the vertical. Finally, the star shows the value of  $\sigma^o$ .

sensitivity to the observation is a scalar. If  $\nabla_{y_i} S$  depicts this scalar,

$$\nabla_{y_i} S = \sum_{k=1}^m \frac{a_{ki} \cdot g_k}{\sigma_i^o} \quad (\text{A10})$$

which can be rewritten using the Eq. (A7) to replace  $a_{ki}$ , and the fact that  $\mathbf{B}$  is symmetric (i.e.  $b_{jk} = b_{kj}$ ):

$$\nabla_{y_i} S = \sum_{k=1}^m \frac{b_{ki} \cdot g_k}{\sigma_i^o + b_{ii}}. \quad (\text{A11})$$

Eventually, we can isolate the scaling factor  $1/(\sigma_i^o + b_{ii})$  to write:

$$\nabla_{y_i} S = \frac{1}{\sigma_i^o + b_{ii}} \sum_{k=1}^m b_{ki} \cdot g_k. \quad (\text{A12})$$

This last Eq. (A12) shows that the sensitivity to a single observation is not only influenced by what happens at point  $i$ , but also by all the neighbouring grid-points, according to the structure function  $[b_{ik}]_{k=1,m}$ . Now, let us imagine a sensitivity to initial conditions,  $\nabla_{\mathbf{x}} S$ , with a significant extremum with respect to a single grid-point. This means that the studied forecast aspect is highly sensitive to what is present in the analysis state vector,  $\mathbf{x}_a$ , at a single level  $k$ , the sensitivity to the other level being quite negligible. The sensitivity to initial conditions can then be written:

$$\nabla_{\mathbf{x}} S = [0 \dots 0 \ g_k \ 0 \dots 0]^T. \quad (\text{A13})$$

In this case, the sensitivity of  $S$  to the single observation is given by:

$$\nabla_{y_i} S = \frac{b_{ki} \cdot g_k}{\sigma_i^o + b_{ii}}. \quad (\text{A14})$$

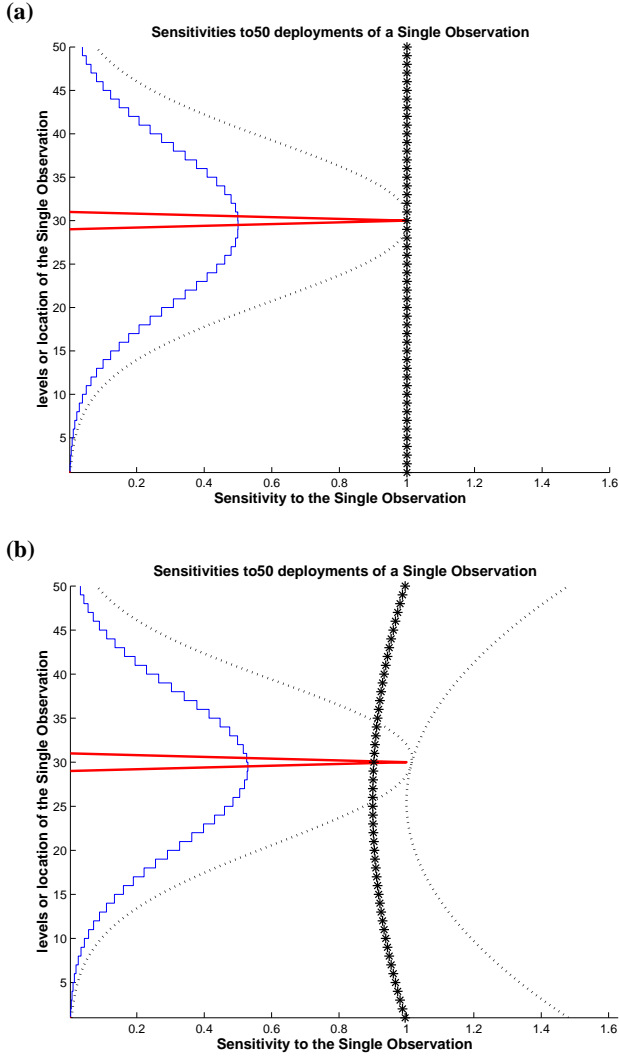
If we test different locations for this single observation, i.e. if we perform  $m$  separate experiments corresponding to the observation located on one of the  $m$  levels of the model (the level of measurement  $i$  will vary from 1 to  $m$ ), we can visualize the structure function  $[b_{ik}]_{i=1,m}$ . This is especially true if the scaling factor  $1/(\sigma_i^o + b_{ii})$  is uniform, i.e. if the variance of both observation and background errors are uniform.

To illustrate the statements given above, we performed 50 experiments, thus testing 50 different locations for the measurement. We chose to place a unit peak of sensitivity to the initial conditions at the thirtieth level, i.e. is setting  $g_{30} = 1$  and  $g_i = 0$  if  $i \neq 30$  in Eq. (A13).

Figure A2a depicts the “flat” situation where the variance of background statistics are constant in the vertical. From this choice arises the fact that the curve depicted by the successive 50 experiments corresponds to half of the structure function  $[b_{ik}]_{i=1,m}$  ( $k = 30$  here). This effect becomes obvious when comparing the stepped curve to the left-hand dotted one in Fig. A2a, which describes the successive sensitivities to the varying single observation. In Fig. A2b, the variances are in the “curved” configuration. In this more general context, we again verify the theoretical result which emphasizes the spreading effect of the structure functions contained in  $\mathbf{B}$ .

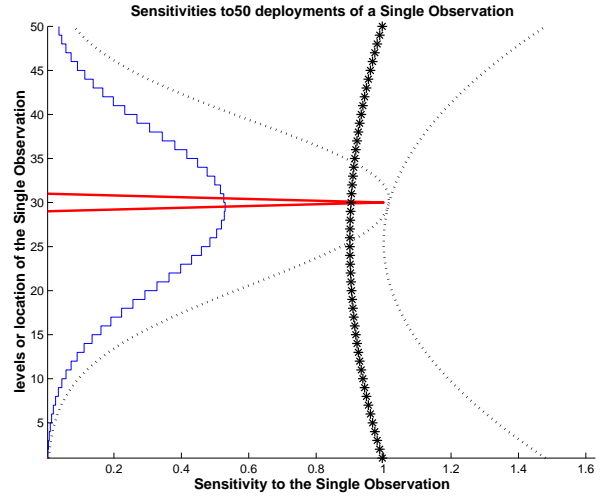
#### A4 Single observation case with interpolation

In this subsection, we chose to compare the spreading effects due to  $\mathbf{B}$  on the one hand, and due to the interpolation scheme contained in  $\mathbf{H}$  on the other hand. In this case, the more complicated operator  $\mathbf{H}$  leads to a heavier mathematical formalism of little interest. It seems more useful to directly show numerical results.

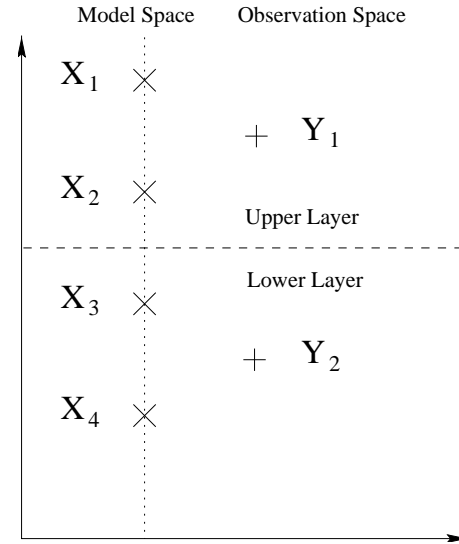


**Fig. A2.** Sensitivity to a single observation for the “flat” formulation (a) and the “curved” formulation (b). The stepped line shows the value of the sensitivity for each location of the observation at the corresponding level. The bold solid curve shows the peak of sensitivity to the initial conditions which is the same for all the experiments. The dotted line on the left shows the covariances of the background observed parameter with all the other model parameters  $b_{ij}$ . The dotted line on the right shows the variances  $b_{ii}$  on the vertical. Finally, the stars show the different values of  $\sigma^o$  along the 50 experiments.

We implemented a linear interpolation scheme that uses  $p = 2$  surrounding levels. Five contiguous levels are involved in the interpolation: 2 levels above, 2 below and the level of observation. These results are plotted in Fig. A3. Comparing Figs. A2b and A3, it appears that the interpolation scheme has quite a negligible influence. The reason for this is that the range of the interpolation scheme is by far much less than the range inherent in the background covariances.



**Fig. A3.** General case: the curves represent the same quantities as in the Fig. A2.



**Fig. A4.** Model space gridpoints and corresponding observations for the first simple experiment configuration.

### A5 Several types of observation

In this subsection, we shall give consideration to the ability of the covariances of the background errors to spread sensitivity to initial conditions from one atmospheric region to the neighbouring ones. For this purpose, we will consider that the model domain is divided into  $k$  regions. Taking into account the non-spreading property of the interpolation scheme,  $\mathbf{H}$  can be written as:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{H}_k \end{bmatrix}. \quad (\text{A15})$$

To simplify the writing, we consider in the following that there are two regions in the atmosphere ( $k = 2$ ), and that each one is observed with a network of  $n_k$  observations (we have  $n = n_1 + n_2$ ), see Fig. A4. The interpolation scheme in  $\mathbf{H}$  is assumed not to be able to transfer any information from one region to another. With this strong assumption, we want to show that the covariances, or  $\mathbf{K}$ , are able to do so on their own.

According to the previous hypothesis, let us calculate  $\mathbf{K}$ . The covariance errors matrices can be written as

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{A16})$$

Then, using Eq. (A1),  $\mathbf{A}$  can be rewritten as

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{H}^T \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_1 + \mathbf{H}_1\mathbf{B}_{11}\mathbf{H}_1^T)^{-1} & (\mathbf{H}_1\mathbf{B}_{21}\mathbf{H}_2^T)^{-1} \\ (\mathbf{H}_2\mathbf{B}_{12}\mathbf{H}_1^T)^{-1} & (\mathbf{R}_2 + \mathbf{H}_2\mathbf{B}_{22}\mathbf{H}_2^T)^{-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H}\mathbf{B}. \quad (\text{A17})$$

At that point two hypothesis can be checked. They are based on two cases where the background errors present in the both regions are either correlated or not. The hypothesis of no-correlation implies that both block  $\mathbf{B}_{21}$  and  $\mathbf{B}_{12}$  are equal to zero, and in that case, the Eq. (A17) yields:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} - \mathbf{B}_{11}\mathbf{H}_1^T(\mathbf{R}_1 + \mathbf{H}_1\mathbf{B}_{11}\mathbf{H}_1^T)^{-1}\mathbf{H}_1\mathbf{B}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{22} - \mathbf{B}_{22}\mathbf{H}_2^T(\mathbf{R}_2 + \mathbf{H}_2\mathbf{B}_{22}\mathbf{H}_2^T)^{-1}\mathbf{H}_2\mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A18})$$

Eventually, the adjoint of the gain operator is also block diagonal:

$$\mathbf{K}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^T & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2^T \end{bmatrix}. \quad (\text{A19})$$

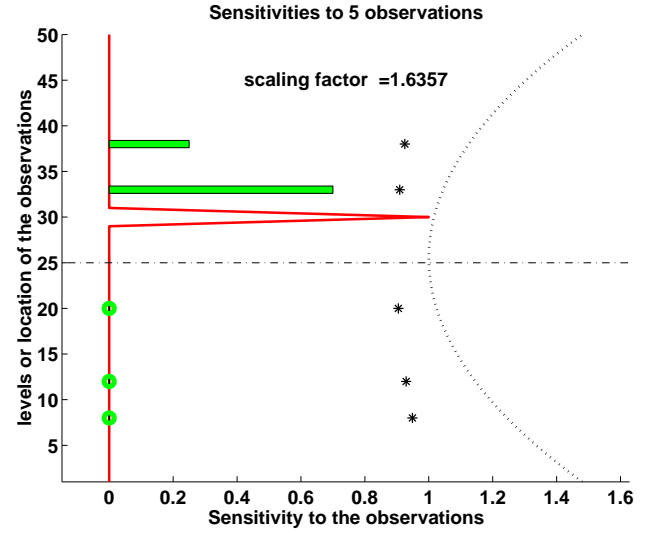
If one considers a forecast aspect which is sensitive to the initial conditions in a single region, only observations located in that region will lead to significant sensitivities to observations. To illustrate this statement, let  $\nabla_{\mathbf{x}}S$  be as follows:

$$\nabla_{\mathbf{x}}S = [g_1 \ 0]^T. \quad (\text{A20})$$

Then, the sensitivity to observations writes:

$$\nabla_{\mathbf{y}}S = [\mathbf{K}_1^T g_1 \ 0]^T. \quad (\text{A21})$$

It appears that the forecast aspect is rather sensitive to observations belonging to the “lower” region. This result is illustrated by Fig. A5 which was produced with the same numerical package as before, with  $k = 2$  regions,  $n = 5$  observations ( $n_1 = 2$  and  $n_2 = 3$ ). The level of shift between the two regions is  $h = 25$ . We use the “curved” configuration of  $\mathbf{B}$  that has been modified to keep zero covariances in both extra diagonal blocks, i.e. that some correlations still exist



**Fig. A5.** Sensitivity to 5 observations spread in the two layers (separated by the chain line) of the atmosphere column. The horizontal bars show the scaled sensitivity to the observation located at the corresponding level (bold circles correspond to null sensitivity). Bold line, dashed lines and the stars (all non-scaled) have the same meaning as in the Fig. A1.

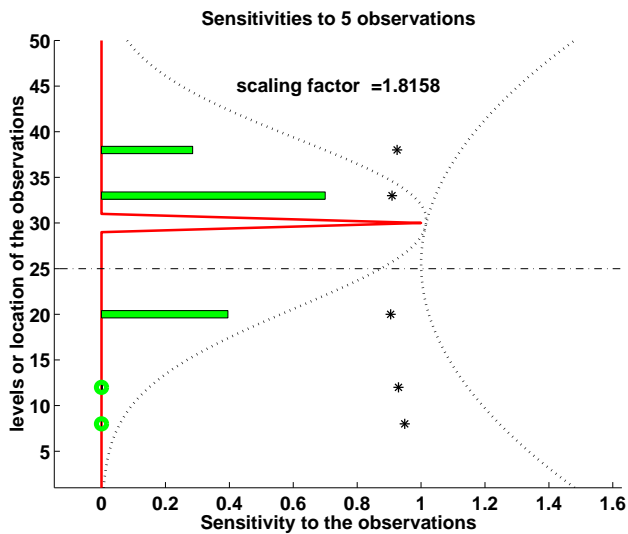
inside a given region, whereas there are no correlations between the two regions. One can note that there is no transfer of information from the region where the gradient to initial conditions  $\nabla_{\mathbf{x}}S$  is significant to the other region (bold circle with null sensitivity). In the case where the background errors present in both regions are correlated, the theoretical formulation of (A17) becomes heavy to handle :  $\mathbf{B}_{21}$  and  $\mathbf{B}_{12}$  are not zero. Therefore,  $\mathbf{A}$  is a full  $m \times m$  matrix, and  $\mathbf{K}^T$  is not block diagonal:

$$\mathbf{K}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^T & \mathbf{K}_{21}^T \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_2^T \end{bmatrix}. \quad (\text{A22})$$

Using the same gradient as stated previously (see Eq. A20), the sensitivity to observations then writes:

$$\nabla_{\mathbf{y}}S = [\mathbf{K}_1^T g_1 \ \mathbf{K}_{12}^T g_1]^T. \quad (\text{A23})$$

As written in the previous paragraph, let us illustrate this case with a numerical example given in Fig. A6. For this case we again use the “curved” configuration of  $\mathbf{B}$ . One can note that the sensitivity present in the upper region can easily be spread to the lower region due to the correlation present in  $\mathbf{B}$ .



**Fig. A6.** Same as Fig. A1 with some correlations between all the levels.

*Acknowledgements.* The authors address special thanks to F. Bouttier for very helpful discussions about the role of the assimilation scheme and about the use of the sensitivity to observations. The practical implementation of this method within the ARPEGE model was possible thanks to the work of Mike Fisher from ECMWF; we thank him for his useful advice. We are particularly grateful to Philippe Lopez for helpful comments on the first version of this article. Our colleagues from the GMME/RECYF team are also strongly acknowledged for their daily scientific and technical support.

Eventually, we are keen on thanking Craig Bishop, Jim Hansen and reviewer B for their careful review of the preliminary version of this paper and their fruitful remarks.

## References

- Baker, N. L. and Daley, R., Observation and background adjoint sensitivity in the adaptive observation targeting problem, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 126, 1431–1454, 2000.
- Bergot, T., Adaptive Observations during FASTEX : A systematic survey of upstream flights, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 125, 3271–3298, 1999.
- Bergot, T., Influence of assimilation scheme on the efficiency of adaptive observations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 127, 635–661, 2001.
- Bergot, T., Hello, G., Joly, A., and Malardel, S., Adaptive Observations : a feasibility study. *Mon. Weather Rev.*, 127, 743–765, 1999.
- Bishop C. H., Etherton, B. J., and Majumdar, S. J., Adaptive sampling with the ensemble transform Kalman filter. Part I : Theoretical aspects, *Mon. Weather Rev.*, 129, 420–436, 2001.
- Cammas, J.-P., Pouponneau, B., Desroziers, G., Santurette, P., Joly, A., Arbogast, P., Mallet, I., Caniaux, G., and Mascart, P., FASTEX IOP17 cyclone: introductory synoptic study with field data, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 125, 3393–3414, 1999.
- Courtier, Ph., Freydl, C., Geleyn, J. F., Rabier, F., and Rochas, M., The ARPEGE project at Meteo-France, ECMWF, workshop on numerical methods in atmospheric models, Reading, UK, 9–13 Sept, 193–231, 1991.
- Doerenbecher, A. and Bergot, T., (currently in progress) : Sensitivity to observations applied to FASTEX targeted observations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, in preparation, 2001.
- Emanuel, K., Raymond, D., Betts, A., Bosart, L., Bretherton, C., Droegeimer, K., Farrell, B., Fritsch, J.-M., Houze, R., Lemone, M., Lilly, D., Rotunno, R., Shapiro, M., Smith, R., and Thorpe, A., Report of the first prospectus development team of the US weather research-program to NOAA and the NSF, *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 76–7, 1194–1208, 1995.
- Errico, R., What is an adjoint model?, *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 78, 2577–2591, 1997.
- Fisher, M. and Courtier, P., Estimating the covariance matrices of analysis and forecast error in variational data assimilation, *ECMWF Tech. Memo.*, 220, 1995.
- Ghil, M. and Malanotte-Rizzoli, P., Data assimilation in meteorology and oceanography, *Adv. Geophys.*, 33, 141–266, 1991.
- Ide, K., Courtier, P., Ghil, M., and Lorenc, A. C., Unified Notation for Data Assimilation : Operational, Sequential and Variational, *J. Meteorol. Soc. Japan*, 75 1B, 181–189, 1997.
- Joly, A. and co-authors, Overview of the field phase of the Fronts and Atlantic Storm Track Experiment (FASTEX) project, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 125, 3131–3164, 1999.
- Langland, R. H. and co-authors, The North Pacific Experiment 8 (Norpex-98): targeted observations for improved North American Weather Forecasts, *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 80, 1363–1384, 1999.
- Lorenc, A. C., Analysis method for numerical weather prediction, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 112, 1177–1194, 1986.
- Morss, R. E., Adaptive observations: idealized sampling strategies for improving numerical weather prediction, Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 225pp, 1999.
- Rabier, F., Klinker, E., Courtier, P., and Hollingsworth, A., Sensitivity of forecast errors to initial conditions, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 122, 121–150, 1996.
- Snyder, C., Summary of an informal workshop on adaptive observations and FASTEX, *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 77, 953–961, 1996.
- Szunyogh, I., Toth, Z., Morss, R., Majumdar, S., Etherton, B. J., and Bishop, C. H., The effect of targeted dropsonde observations during the 1999 Winter Storm Reconnaissance Program, *Mon. Weather Rev.*, 128, 3520–3537, 2000.
- Thépaut, J.-N., Courtier, P., Belaud, G., and Lemaitre, G., Dynamical structure functions in a four-dimensional variational assimilation: a case study. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 122, 535, 561, 1996.





# Chapitre 5

## Étude de la POI18 : de l'influence des écarts entre observations et modèle.

Dans ce chapitre, on étudie la situation de la POI18. Le lecteur curieux trouvera des éléments complémentaires sur cette POI dans le numéro spécial de la revue *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* dédié à la campagne FASTEX (volume **125**), dont on cite tout particulièrement l'article de Langland *et al.* (Langland *et al.*, 1998). La thèse de Jérôme Donnadille (Donnadille, 2000), présente aussi des résultats sur cette POI.

Contrairement au chapitre 4 sur la POI17, on documentera ici une autre utilisation de la sensibilité aux observations qui permet de déceler les faiblesses de l'algorithme d'assimilation qui les utilise.

Après une présentation du contexte de la POI18 dans FASTEX, nous nous proposons de documenter les structures sensibles de cette POI ainsi que leur transformation par l'adjoint de l'opérateur d'assimilation. Ensuite, nous étudierons les sensibilités aux observations et leur influence sur l'estimation de la fonction coût  $\mathcal{J}$ , directement dans l'espace des observations. Ceci nous aidera à mettre en évidence et à expliquer le comportement singulier de certaines observations ciblées. L'origine de ce comportement est dans l'algorithme d'assimilation 3D-Var qui les traite.

### 5.1 La POI 18 : du 22 au 25 février 1997

#### 5.1.1 La description de la situation météorologique

La POI 18 est un cas de "cyclogenèse en air froid" qui s'est déroulé du 22 au 25 février 1997. La dépression *L44* de la POI18 a connu un développement cyclonique explosif associé à un précurseur d'altitude (noyau de tourbillon d'altitude associé à une descente de la tropopause dynamique) très marqué ainsi que le suggère un noyau de tourbillon potentiel de plus de 5.0 *PVU* (Potential Vorticity Unit) sur la surface isentrope de 304 *K* (non montré).

Ce noyau est présent au-dessus de la Baie d'Hudson puis des terres canadiennes dès le 20 février à 21h TU (fig. 5.1). De plus, c'est durant cette POI que le niveau de tropopause le

plus bas de la campagne a été observé (Donnadille *et al.*, 2001).

La cyclogenèse de surface débute le 22 février à 12h TU (fig. 5.1) au sud du Groenland. Le vortex de  $L44$  associé à cette cyclogenèse de surface apparaît dans un environnement froid au nord de la zone barocline qui se situe sur l'Atlantique de l'Ouest. Le 23 février à 00h TU, la dépression de surface se situe au sud-est du Groenland et est caractérisée par une pression de surface de  $975 \text{ hPa}$ . Une pression minimale de  $950 \text{ hPa}$  est atteinte le 24 février à 18h TU.

### 5.1.2 Le dispositif des observations

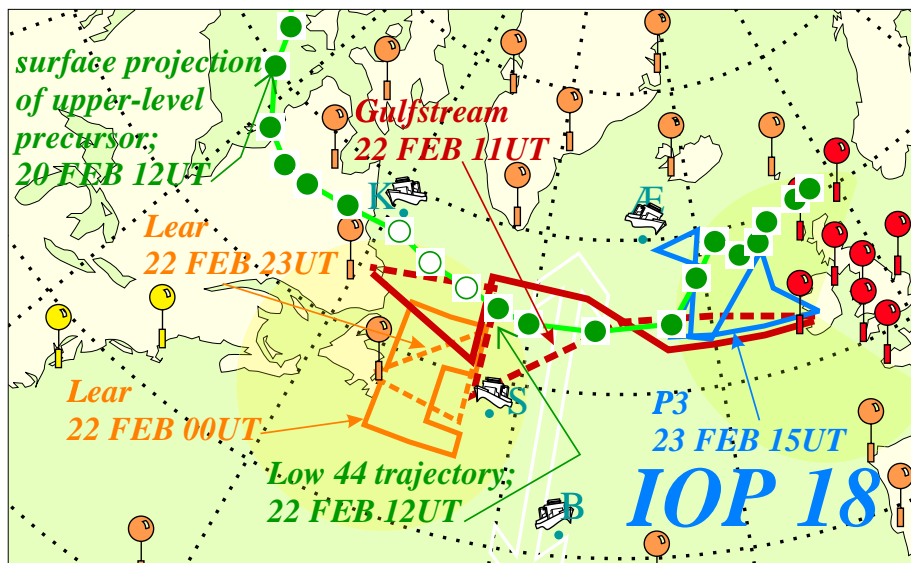


FIG. 5.1: Description de la trajectoire de la POI 18. (d'après A. Joly, 2000). Les ronds reliés entre eux indiquent la trajectoire de la dépression. Un disque positionne une dépression tandis qu'un cercle indique un thalweg. Les ballons gris clair indiquent la position des stations de radiosondage avec un nombre de 4 sondages par jour en permanence ou en alerte tandis que les ballons gris foncés sont relatifs à des stations à 8 lâchers par jours en cas d'alerte. Les traits gras (continus et en tirets) reportent les trajectoires des vols d'étude de la POI. Les bateaux sont positionnés au lieu de leurs sondages.

#### Les vols de ciblage

Durant cette POI, 3 vols de ciblage ont eu lieu. Ils correspondent à l'échantillonnage de cibles pertinentes pour la prévision de la dépression  $L44$ , le 23 février à 12h TU. Le premier de ces vols de ciblage a été opéré par le Learjet. Les deux vols suivants ont été réalisés avec le G-IV.

Le Learjet a effectué un vol de ciblage en début de période (le 22 février à 00h TU). Les cibles échantillonnées par 18 sondes sont issues de la méthode *Ensemble Transform* (Bishop et Toth, 1999 ; Szunyogh *et al.*, 2000).

Les deux expériences de ciblage du **G-IV** se font sur des traversées de l'Atlantique (cf. figure 5.1). Le premier vol, daté du 22 février à 12h TU est effectué entre l'Irlande (Shannon) et le Canada (Goose Bay, Labrador). Le second vol constitue le retour vers l'Europe, en date du 22 février à 18h TU.

Dans la présente étude, nous allons nous intéresser au premier vol du **G-IV**. On détaille ici les caractéristiques de celui-ci :

Bien que l'avion ait traversé tout l'Atlantique Nord, les mesures n'ont été effectuées qu'à partir du 30<sup>e</sup> méridien Ouest et à l'ouest de celui-ci, vers le Canada. Au cours de ce déploiement, les dropsondes ont échantillonné à la fois des cibles dites *objectives* basées sur des produits de la technique de l'adjoint (Bergot *et al.*, 1999), et des cibles dites *subjectives*, correspondant à une forte anomalie de tourbillon potentiel (Donnadille *et al.*, 2001).

Ce vol se découpe ainsi en trois parties que l'on retrouve sous la forme des 3 segments du tracé en tirets sur la figure (5.1). 28 dropsondes ont été utilisées durant ce vol, mais seulement 25 d'entre elles ont fonctionné et sont disponibles dans le jeu d'observations utilisé pour notre étude.

Numéro du segment	Direction de vol	Nature de la cible	Fréquence des sondes
<b>1</b> : Partie est	sud-ouest	<i>objective</i> , basse couche	1.5° (lat.)
<b>2</b> : Centrale	nord	<i>objective</i> , basse couche + <i>subjective</i> , altitude	1°
<b>3</b> : Partie ouest	ouest-sud-ouest	<i>objective</i> , altitude	1°

TAB. 5.1: *Caractéristiques du déploiement des dropsondes sur les cibles de la POI18. On renvoie le lecteur au texte pour les explications relatives à la nature des cibles objectives et subjectives.*

Les cibles *objectives*, issues de produits des techniques de l'adjoint concernent la prévision de la tempête correspondant à *L44* pour le 23 février à 12h TU au large de l'Irlande. Dans la dernière partie du vol, ces cibles correspondent à la partie froide à l'ouest de la dépression *L44* qui est en train de se creuser.

### Les autres moyens de mesure

En plus de ces vols de ciblage, il faut noter que cette POI a aussi été bien observée par les radiosondages de la côte américaine, ainsi que par les bateaux déployés à l'occasion de FASTEX. Nous attirons tout particulièrement l'attention du lecteur à leur propos, puisque les données issues des sondages de ces navires (radiosondages ascendants) nous serviront dans cette étude. Sur la figure (5.1), les navires sont représentés en place de leur lieu de mesure.

Ainsi le **Knorr** (bateau de la NOAA) qui se situe en mer du Labrador est très proche de la trajectoire du **G-IV**. De même, le **Suroît** (bateau français de l'Ifremer) est positionné à proximité du point le plus au sud de la trajectoire de l'avion. Les localisations de l'**Ægir** (bateau de la Garde des côtes Islandaises) et du **Bugaev** (bateau ukrainien) sont d'un plus faible intérêt pour notre étude, dans laquelle nous inter-comparons les données du **G-IV** et celles des navires. On renvoie le lecteur à la documentation sur ces navires qu'il peut trouver sur le serveur internet de FASTEX : <http://www.cnrm.meteo.fr/dbfastex/>.

## 5.2 La sensibilité aux conditions initiales

Afin de bien comprendre comment la distribution spatiale des observations ciblées peut *capturer* la structure tridimensionnelle des cibles, on étudiera les zones sensibles dans l'espace du modèle avant de les examiner dans l'espace des observations. Ainsi on pourra se familiariser avec la représentation graphique des quantités (sensibilités, innovations, etc.) dans l'espace *discret* des observations.

Les cibles objectives de la partie ouest sont basées sur des produits adjoints pour une région d'intérêt qui se situe dans la boîte 60° Nord, 50° Nord, 10° Ouest et 30° Ouest (cf. figure 5.2). L'échéance de la prévision à améliorer est de 24 heures. L'aspect de la prévision que nous étudions ici est le développement de *L44* caractérisé par le tourbillon en basse couche. Nous avons donc utilisé une fonction coût basée sur l'entropie de la prévision (cf. équation 2.12) intégrée sur la région d'intérêt et entre les niveaux 22 et 26 du modèle ARPEGE (qui en compte 31 dans la version utilisée), c'est-à-dire entre 780 *hPa* et 930 *hPa* environ. La fonction coût  $\mathcal{J}$  est alors identique à celle qui a pu être utilisée durant FASTEX.

De plus, on insistera sur l'effet des observations ciblées sur la covariance des erreurs d'analyse. Une attention particulière sera portée au vecteur  $\mathbf{c} = \mathbf{A}\nabla_{\mathbf{x}_a}\mathcal{J}$ , avant l'examen de la sensibilité aux observations. Ce vecteur, lorsque comparé aux zones sensibles classiques ( $\nabla_{\mathbf{x}_a}\mathcal{J}$ ), montre l'effet de l'opérateur (très représentatif de l'opérateur adjoint  $\mathbf{K}^T$ , cf. équation 2.42) dans le calcul de la sensibilité aux observations.

### 5.2.1 La sensibilité aux conditions initiales

Dans le cas de la POI18, *L44* est une dépression au développement explosif et au déplacement assez rapide. Ceci explique qu'en seulement 24 heures, avec une zone d'intérêt sur la façade est de l'Atlantique, les cibles à l'instant initial se trouvent essentiellement entre Terre-Neuve, le Canada et le Groenland.

Les figures (5.2-a.) et (5.2-b.) montrent les zones sensibles ( $\nabla_{\mathbf{x}_a}\mathcal{J}$ ) à 300 *hPa* et 700 *hPa* pour la température, ainsi que le tracé du vol de ciblage et les axes des coupes verticales représentées dans les figures (5.3-a.) et (5.3-b.). L'examen de ces figures (5.2) montre tout d'abord que le déploiement de sondes du **G-IV** est bien réparti sur les zones sensibles à 700 *hPa*. Les sondes lâchées aux extrémités du segment méridien (second segment) échan-

tillonnent les maxima de sensibilité à la température à cette altitude. À 300  $hPa$ , la zone sensible est décalée plus au nord-ouest.

On retrouve dans ce décalage vertical de la zone sensible, les caractéristiques du flux orienté au nord-ouest qui intervient dans la phase initiale du développement de  $L44$  (air froid en provenance du pôle).

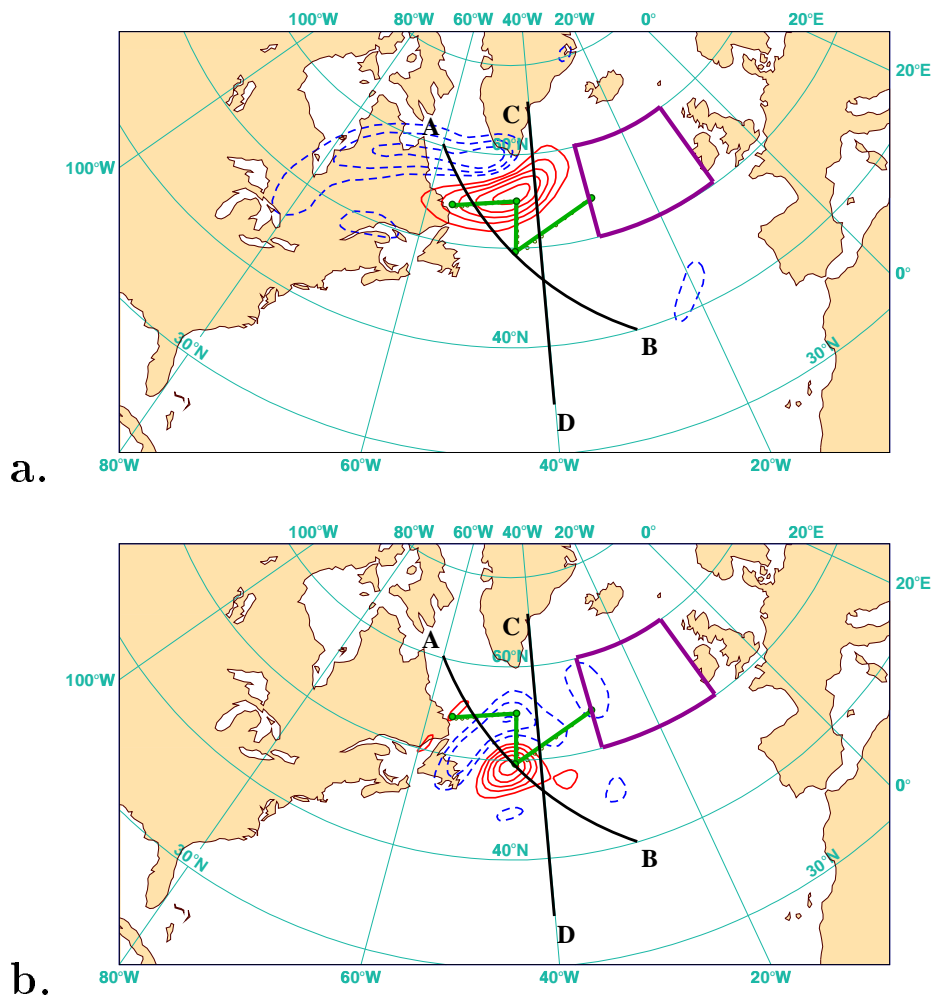


FIG. 5.2: Sensibilités aux conditions initiales de température, le 22 février 1997 à 12h TU (POI18), à 300  $hPa$  (a.) et 700  $hPa$  (b.). Les isolignes pleines désignent les sensibilités positives, les tirets montrent les sensibilités négatives. Les axes A-B et C-D repèrent les coupes verticales des figures (5.3-a.) et (5.3-b.). La ligne brisée à l'Est de Terre-Neuve donne la trajectoire du vol du G-IV allant d'est en ouest. Le cadre au large de l'Irlande délimite la zone d'intérêt pour la prévision du 23 février à 12h TU. Valeurs extrêmes de la figure a. :  $Max \simeq 1.7 \times 10^{-5} s^{-2}.K^{-1}$ ,  $min \simeq -1.1 \times 10^{-5} s^{-2}.K^{-1}$ . Valeurs extrêmes de la figure b. :  $Max \simeq 1.1 \times 10^{-4} s^{-2}.K^{-1}$ ,  $min \simeq -6.0 \times 10^{-5} s^{-2}.K^{-1}$ .

On note sur les figures (5.3-a.) et (5.3-b.) que les sensibilités restent essentiellement confinées à la troposphère et que le maximum de sensibilité se situe à 800  $hPa$ .

Ce maximum de sensibilité de la prévision de l'entrophie à la température de basse couche (figure 5.2-b.) se situe au large de Terre-Neuve, les structures sensibles se décalent à

la limite de la mer de Baffin à 300 hPa (figure 5.2-a.).

On retrouve la pente orientée au nord-ouest sur la coupe verticale **A-B** (figure 5.3-a.) où l'inclinaison est bien plus marquée (2 fois plus inclinée) que sur une coupe méridienne (axe Nord-Sud de la figure 5.3-b.) ou que sur une coupe zonale (non représentée).

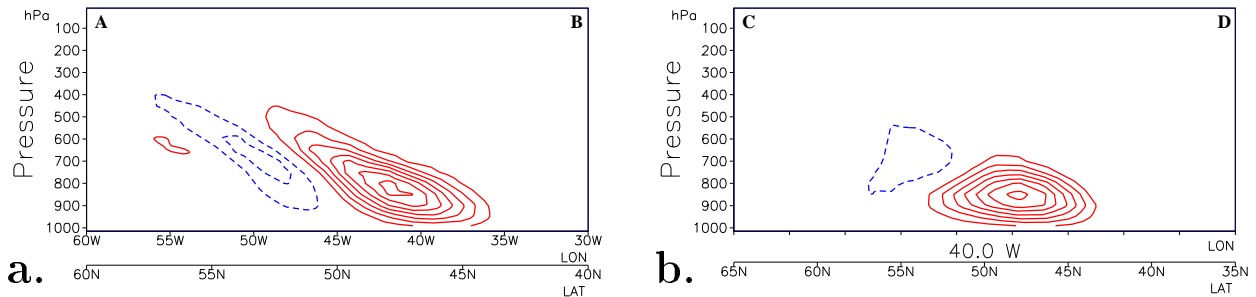


FIG. 5.3: *Sensibilité aux conditions initiales de température, vue en coupe verticale, selon les axes A-B (a.) et C-D (b.) représentés sur la figure (5.2), dont les mêmes conventions graphiques sont utilisées pour ces tracés. Max  $\simeq 1.5 \times 10^{-4} s^{-2} \cdot K^{-1}$ , min  $\simeq -6.5 \times 10^{-5} s^{-2} \cdot K^{-1}$ . L'axe vertical est donné en pression (hPa).*

Ces représentations de la sensibilité dans l'espace du modèle (sensibilité aux conditions initiales du modèle donc définies dans cet espace) nous permettent de nous faire une idée claire de la structure spatiale tridimensionnelle des cibles utilisées lors de FASTEX.

Cependant, la fréquence de lâché des sondes est de  $1^\circ$  (voire  $1^\circ 5$  pour le premier segment du vol). Il y a donc des hiatus entre les points de sondage et aussi sur la verticale des sondages, entre les niveaux de mesure.

Il est alors intéressant de comparer les structures instables que l'on espère échantillonner (montrées dans les figures (5.2) et (5.3)) et ce qui l'est réellement. Pour cela, il faut se placer dans l'espace des observations qui ont été déployées. C'est l'objet de la partie suivante.

## 5.2.2 La sensibilité aux conditions initiales dans l'espace des observations

La sensibilité aux conditions initiales,  $\nabla_{x^a} \mathcal{J}$  représente une cible avec une structure tridimensionnelle (répartition spatiale et inclinaison des structures avec la verticale) qui a été échantillonnée par les dropsondes du **G-IV**. Dans la figure (5.4), on représente ces structures sensibles dans le plan vertical d'atmosphère échantillonné par les sondes. C'est en fait un plan trifolié selon les segments du vol de l'avion.

Mais ce n'est pas cette information qui est réellement injectée dans le système d'assimilation. L'information dispensée par la figure (5.4) est un champ continu et l'information fournie par les observations ciblées est discrétisée en des points plus ou moins régulièrement répartis.

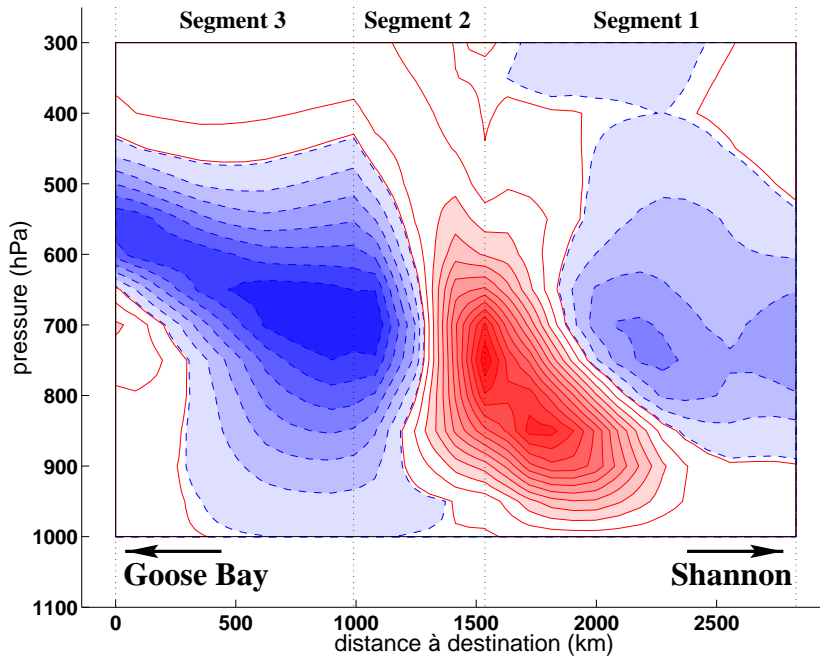


FIG. 5.4: *Sensibilité à la température initiale représentée en coupe verticale selon les trois segments successifs du vol de ciblage du G-IV de Shannon (Irlande et à droite du graphique) à Goose Bay (Labrador et à gauche). Les contours pleins (avec des tirets) indiquent une sensibilité positive (négative). Un code chromatique de rouge (bleu) accompagne cette représentation comme dans la figure (5.5). L'axe des abscisses est la distance au sol, l'axe des ordonnées donne l'altitude exprimée en pression.*

La figure (5.4) est intermédiaire entre les figures (5.3) et (5.5) puisqu'on se place dans le plan des observations sans en subir le caractère discret.

Afin de se faire une idée de ce que les observations ciblées de température ont *capturé* des cibles, on peut interpoler le champ de sensibilité dans l'espace des observations ciblées en utilisant la partie relative au déploiement des dropsondes du G-IV de l'opérateur linéarisé  $\mathbf{H}_t$  utilisé lors de l'assimilation. La figure (5.5) représente  $\mathbf{H}_t \nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$  avec de nouvelles conventions graphiques que nous utiliserons dorénavant pour exprimer toutes les quantités définies dans l'espace des observations.

En chaque point observé, la sensibilité (ou la quantité que l'on souhaite représenter) est figurée par un disque dont le diamètre est fonction de l'amplitude de sa valeur absolue. C'est un code chromatique qui permet ensuite de distinguer le signe de la quantité pointée : une gamme de bleus est attribuée aux valeurs négatives et une gamme de rouges s'associe aux valeurs positives. Ces teintes sont d'autant moins intenses que la valeur absolue de la quantité représentée est faible. Combiné au diamètre variable, ce système de représentation permet de faire apparaître très clairement les observations associées aux plus fortes valeurs de sensibilité.

D'autre part, les points observés sont représentés dans le plan "relatif" à la trajectoire de l'avion qui s'étend entre celle-ci et le sol, comme dans la figure (5.4). Les coudes (pliures du plan observé) de la trajectoire sont représentés par des droites verticales tracées en pointillé. La comparaison entre les figures (5.4) et (5.5) aidera le lecteur à se familiariser avec ce mode de représentation, puisque les deux figures représentent toutes deux la sensibilité à la température initiale mais dans des espaces différents.

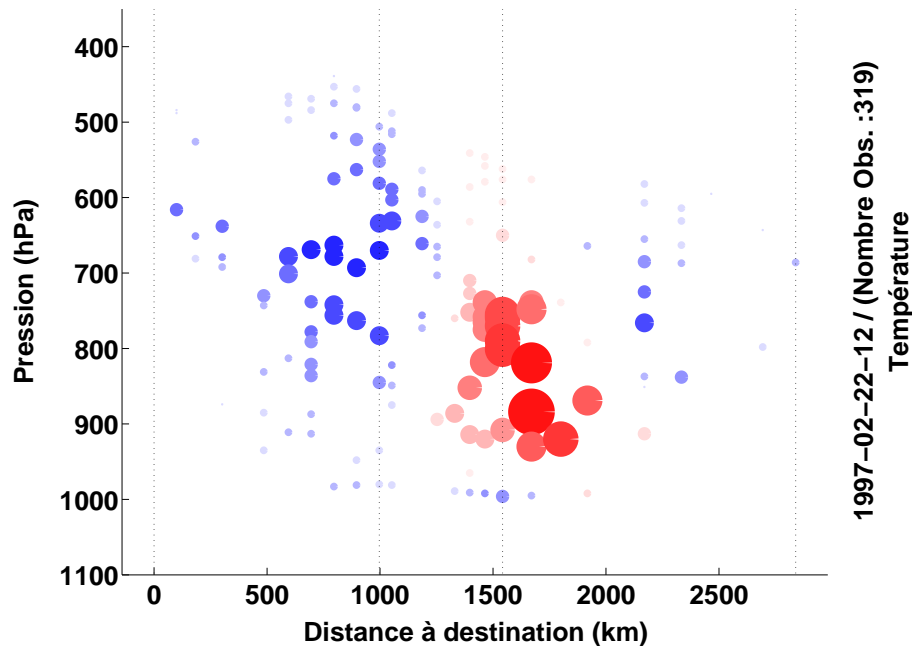


FIG. 5.5: Sensibilité à la température initiale représentée dans l'espace des observations ciblées de température. On retrouve, les 3 segments du vol comme dans la figure(5.4). L'axe des abscisses représente la distance au point de largage de la dernière dropsonde. La coordonnée verticale est la pression. En chaque point d'observation, la taille de disque est fonction de l'amplitude de la sensibilité; tout comme la valeur (plus ou moins intense) du bleu pour les sensibilités négatives et du rouge pour les sensibilités positives (cf. texte).

### 5.3 Les effets des fonctions de structure de $\mathbf{A}$ sur $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$

Dans la partie 3.4, nous nous sommes attachés à décrire les fonctions de structure apparaissant dans les vecteurs de *mise à jour* de  $\mathbf{A}$  et intervenant dans l'estimation du vecteur  $\mathbf{c}$  (cf. équation 3.3). Nous avons aussi vu que ce vecteur est représentatif des effets de l'opérateur d'assimilation sur les structures sensibles. Ces études ont été menées dans des cas très simples, avec peu d'observations. À présent nous allons analyser les effets de  $\mathbf{A}$  dans le cas de ce vol de ciblage. Nous nous intéresserons aussi à l'apport des observations ciblées dans la description de ces variances.



### 5.3.1 Influence des fonctions de structure

Les figures (5.6-a.) et (5.6-b.) montrent des coupes horizontales pour le vecteur  $\mathbf{c} = \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ , à 300 hPa et 700 hPa, respectivement. Elles reprennent les structures sensibles montrées dans les figures (5.2) auxquelles on a appliqué l'opérateur  $\mathbf{A}$ . Dans ce cas,  $\mathbf{A}$  a été estimé en assimilant toutes les observations conventionnelles disponibles lors de FASTEX ainsi que les observations ciblées (les bateaux présentés dans la partie 5.1.2 n'en font pas partie). Dans les figures qui vont suivre, les paramètres de température et de vent sont séparés dans un souci de clarté, mais toutes les observations ciblées de température et de vent ont été assimilées ensemble avec les observations conventionnelles et entrent dans la formulation de  $\mathbf{A}$ .

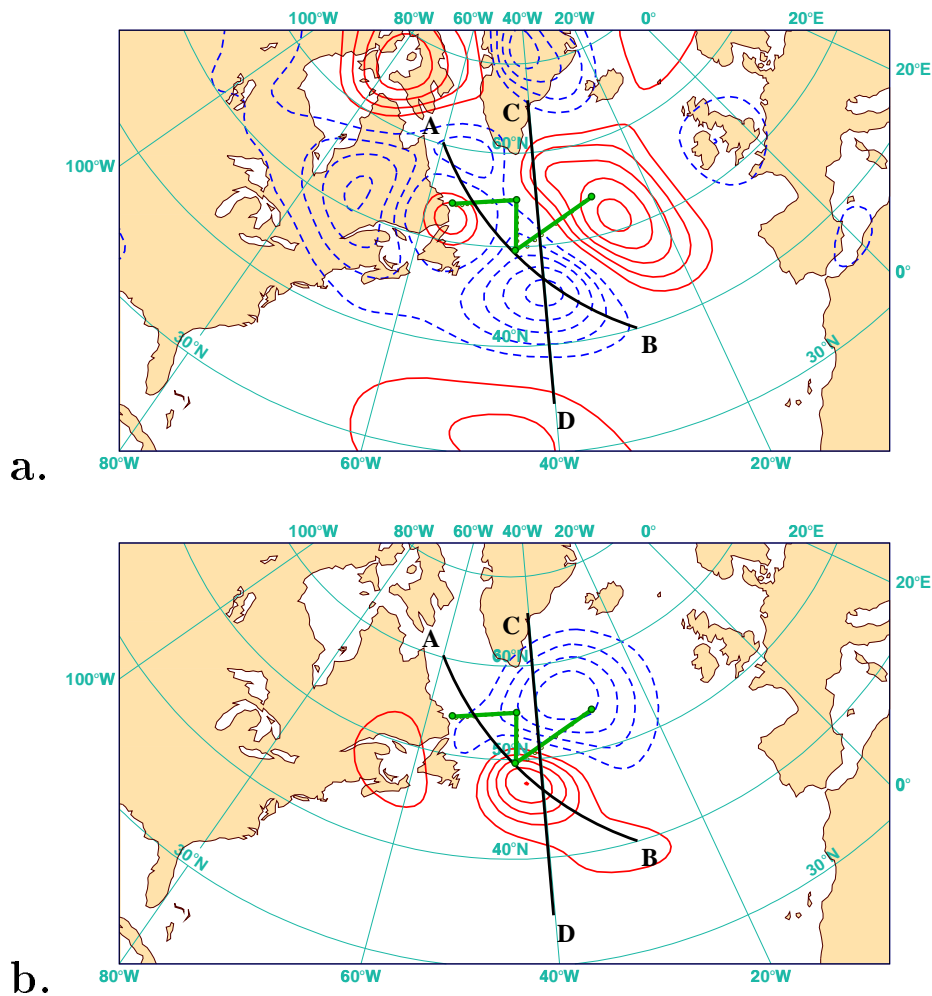


FIG. 5.6: Coupes horizontales de  $\mathbf{c} = \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  (cf. équation 3.3) à 300 hPa (a.) et à 700 hPa (b.). Les axes A-B et C-D indiquent les plans des coupes verticales représentées dans les figures (5.3-a.) et (5.3-b.). (a.) :  $Max \simeq 3.2 \times 10^{-8} K.s^{-2}$ ,  $min \simeq -3.1 \times 10^{-8} K.s^{-2}$ . (b.) :  $Max \simeq 7.1 \times 10^{-8} K.s^{-2}$ ,  $min \simeq -7.0 \times 10^{-8} K.s^{-2}$ .

L'effet de l'opérateur  $\mathbf{A}$  transforme les structures sensibles de façon radicale. En ce qui

concerne les structures horizontales, les échelles caractéristiques ont été significativement augmentées, comme le laisse apparaître l'examen des figures (5.6) comparées aux figures (5.2). Les *portées* qui décrivent les covariances intra-paramètre ainsi que les balances inter-paramètres sont la cause de ces transformations. La figure (5.6) montre l'effet concernant la température qui subit l'influence de tous les paramètres observés (température, vent, humidité, etc.) par les observations ciblées et conventionnelles.

La présence d'observations variées (en paramètre et déploiement) complexifie la formulation de **A**. Ceci est détectable sur les champs de la figure (5.6). Cette complexification peut s'interpréter comme la conjugaison de l'effet des portées et des balances statistiques (qui régissent les fonctions de structure), de l'effet des observations conventionnelles et de l'effet des observations ciblées.

En comparant les sensibilités (cf. figures 5.2) et le vecteur **c** (cf. figures 5.6), on détecte l'effet des portées de **B** par la dilatation de la structure sensible.

Le champ **c** tracé au niveau 300 hPa (cf. figure 5.6-a.) a une apparence bien plus compliquée que le gradient (fig. 5.2-a.). Ceci s'explique en partie par le fait que le niveau de coupe à 300 hPa correspond à une zone *floue* où les valeurs de **c** sont assez faibles. Cependant nous avons conservé ce niveau pour l'homogénéité avec les autres figures de ce chapitre.

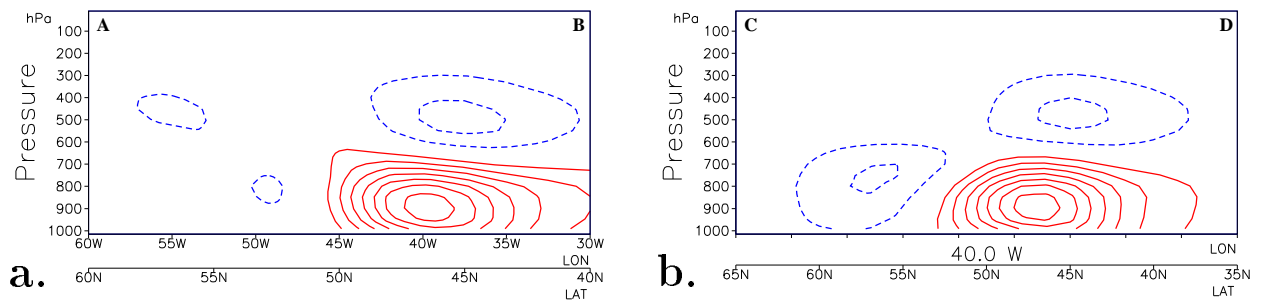


FIG. 5.7: Coupes verticales du vecteur **c**, selon les axes **A-B** (a.) et **C-D** (b.) représentés sur la figure (5.6). Les mêmes conventions graphiques sont utilisées pour ces tracés. Valeurs extrêmes de **c** pour la température:  $Max \simeq 2.4 \times 10^{-7} K.s^{-2}$  et  $min \simeq -7.2 \times 10^{-8} K.s^{-2}$ .

La comparaison entre les figures (5.7) et (5.3) illustre bien l'effet de **A** lié au 3D-Var sur la structure verticale de **c**. On note une plus faible inclinaison des structures avec une composante dipolaire sur la verticale. Comme nous l'avons montré dans l'article (Doerenbecher et Bergot, 2001) (donné dans la partie 4.2 de ce mémoire), les fonctions de structure (portées et balances) ont un effet d'étirement vertical de  $\nabla_{x_a} \mathcal{J}$ . Cet effet d'étirement se traduit par l'apparition du noyau supérieur de la structure dipolaire (sur la verticale) dans la partie droite des figures (5.7-a.) et (5.7-b.).

À cela se joint l'effet de balance provoqué par les autres observations ciblées au même niveau ou à d'autres niveaux et concernant d'autres paramètres. Au final, il est bien ardu de distinguer ces effets entre eux.

Tout ce que l'on peut constater, c'est la transformation radicale des cibles dès lors que

le processus d'assimilation est pris en compte dans le calcul adjoint. Si on imagine alors d'élaborer un vol de ciblage à *la main* sur la base des zones sensibles vues dans  $\mathbf{A}_c \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  (les observations ciblées ne sont donc pas prises en compte dans  $\mathbf{A}$ ), le vol du **G-IV** et les 2800 *km* qu'il couvre peuvent paraître insuffisants pour échantillonner une région sensible de près de 4000 *km* de côté (contre environ 2000 *km* pour  $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ ). Des déploiements qui tiennent compte de cet élargissement (doublement des échelles significatives) pourraient se révéler assez efficaces. Cependant, la réalisation de tels déploiement avec un seul avion semble difficilement envisageable.

### 5.3.2 Gain des observations ciblées sur les covariances

Pour évaluer l'effet des observations ciblées sur la structure et l'amplitude du vecteur  $\mathbf{c}$  et comprendre comment l'adjoint de l'opérateur d'assimilation gère l'ensemble des observations du vol du **G-IV**, on peut étudier la diminution de variance dans la direction des structures sensibles. Une approximation de cette diminution est estimée grâce à la différence suivante :

$$\Delta_t \mathbf{c} = \mathbf{c}_{ct} - \mathbf{c}_c \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{c}_{ct} = \mathbf{A}_{ct} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  (observations conventionnelles et ciblées entrent dans la formulation de  $\mathbf{A}_{ct}$ ) et  $\mathbf{c}_c = \mathbf{A}_c \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  (seules les observations conventionnelles entrent dans la constitution de  $\mathbf{A}_c$ ).

Les figures (5.8-a.) et (5.8-b.) montrent les coupes horizontales de  $\Delta_t \mathbf{c}$  (cf. équation 5.1) pour les mêmes niveaux verticaux que la figure (5.6) (300 et 700 *hPa*, respectivement). Elles montrent l'impact sur les statistiques de  $\mathbf{A}$  des observations du vol de ciblage. La structure de cet impact est une combinaison de la forme du déploiement des observations additionnelles et de l'effet des fonctions de structure de  $\mathbf{B}$ . Ainsi, à 700 *hPa*, le vecteur  $\Delta_t \mathbf{c}$  a un aspect qui est très proche de celui de la différence entre les analyses (ou des incréments d'analyse) estimées avec toutes les observations ou simplement les observations conventionnelles (non représentés).

Dans le vecteur  $\Delta_t \mathbf{c}$ , on lit l'effet des observations ciblées sur  $\mathbf{c}$ . On note alors que l'effet de chaque observation ciblée n'est pas ressenti individuellement, mais que cet effet sur les statistiques relève de l'influence d'un paquet d'observations : les échelles caractéristiques de  $\Delta_t \mathbf{c}$  sont significatives des portées de l'assimilation.

$\Delta_t \mathbf{c}$  est quadripolaire et deux des quatre maxima apparaissent sur chacune des figures (5.8-a.) et (5.8-b.). Les noyaux des extrêmes de  $\Delta_t \mathbf{c}$  s'étendent dans l'axe du vol (axe essentiellement est-ouest).

La coupe verticale au travers de  $\Delta_t \mathbf{c}$  selon l'axe  $\mathbf{A-B}$  (montré dans la figure 5.9) permet de noter que les deux valeurs extrêmes supérieures sont placées juste à 300 *hPa*, c'est-à-dire au-dessus du niveau de vol de l'avion (350 *hPa*), au niveau de la tropopause "statistique" de  $\mathbf{B}$ .

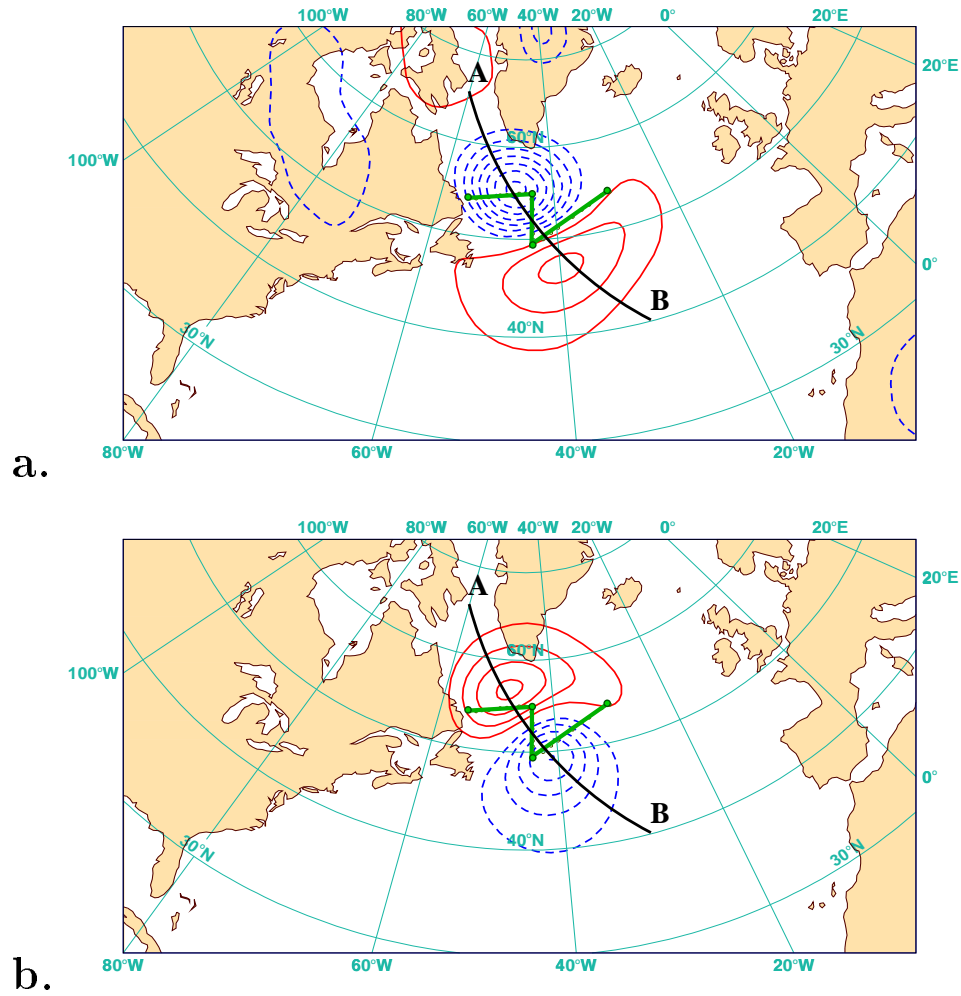


FIG. 5.8: Structure de  $\Delta_t c$  (cf. équation 5.1) pour la température tracée à 300 hPa (a.) et à 700 hPa (b.). L'axe A-B indique la coupe verticale dont le résultat est montré en figure (5.9). Valeurs extrêmes de (a.) :  $Max \simeq 4.0 \times 10^{-8} K.s^{-2}$  et  $min \simeq -9.0 \times 10^{-8} K.s^{-2}$ . Valeurs extrêmes de (b.) :  $Max \simeq 8.3 \times 10^{-8} K.s^{-2}$  et  $min \simeq -1.0 \times 10^{-7} K.s^{-2}$ .

Les deux extrêmes de basse couche, dont l'amplitude est significativement supérieure à celle des noyaux d'altitude, ne sont pas établis au même niveau de pression. La valeur extrême au nord (placée à gauche sur la figure 5.9) se situe à 600  $hPa$  et une coupe horizontale à cette altitude montre la coïncidence de ce maximum avec le coude nord du vol (non représenté). On constate aussi une bonne superposition entre le minimum sud de basse couche (850  $hPa$ ) et le coude sud du vol de ciblage. Afin de mettre ceci partiellement en évidence, on a placé sur la figure (5.9) des axes verticaux en regard des latitudes des coudes du vol (l'axe **A-B** et le second segment du vol n'étant pas confondus, il n'y a pas exacte superposition).

Les maxima de ce champ se placent donc aux extrémités du second segment du vol du **G-IV**. Entre ces deux extrémités, les échelles caractéristiques sont plus faibles ( $\sim 300$   $km$ ) que dans les zones de  $\Delta_t \mathbf{c}$  non directement échantillonnées par les dropsondes. Dans ces régions-là (en bordure du déploiement) les échelles sont de l'ordre des portées ( $\sim 1500$   $km$  à  $2000$   $km$ ).

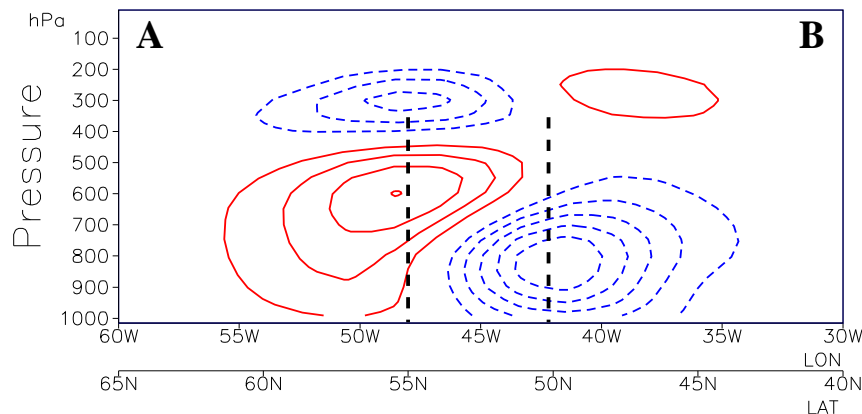


FIG. 5.9: Coupe verticale de  $\Delta_t \mathbf{c}$  (cf. équation 5.1) pour la température, selon l'axe **A-B** représenté sur la figure (5.8), dont les mêmes conventions graphiques sont utilisées pour ces tracés. Les axes verticaux en tirets sont placés en vis-à-vis des latitudes des coudes du vol du **G-IV**. Les valeurs extrêmes du champ de différence  $\Delta_t \mathbf{c}$  sont les suivants :  $Max \simeq 1.0 \times 10^{-7} K.s^{-2}$  et  $min \simeq -1.4 \times 10^{-7} K.s^{-2}$ .

## 5.4 La sensibilité aux observations ciblées

Concentrons nous à présent sur la sensibilité de la fonction coût *enstrophie* aux observations ciblées ( $\nabla_{y_t} \mathcal{J}$ , cf. équation 2.52). Cette sensibilité traduit le potentiel des différentes observations du vol ciblé à influencer la prévision. Toutes les observations ne sont pas équivalentes en la matière ...

### 5.4.1 La sensibilité aux observations de température

Dans le cas de la température, il n'y a guère de différences entre les structures de  $\mathbf{c}$  sécantes au plan de vol et celles que l'on peut déduire de l'étude des sensibilités aux observations. Ainsi on peut retrouver des éléments de la coupe verticale (5.7-b.) (entre 50°N et 55°N) dans le second segment de la figure (5.10).

Du fait que les structures en basse couche de  $\nabla_{x_a}\mathcal{J}$  et de  $\mathbf{c}$  soient relativement voisines le long des segments 2 et 3 du vol, les figures (5.10, sensibilité aux observations) et (5.5, sensibilité aux conditions initiales interpolées dans l'espace des observations) sont très comparables pour des *distances à destination* (axe des abscisses) inférieures à 2000 km et des altitudes inférieures à celle du niveau 600 hPa (cf; paquet d'observations noté 1 sur la figure 5.10). L'adjoint de l'assimilation a peu d'influence sur la sensibilité aux conditions initiales concernées par ces quelques observations.

Cependant, l'effet de l'opérateur  $\mathbf{A}$  introduit aussi des différences en ce qui concerne le reste des points observés. En effet, du fait de l'extension verticale, la partie située au-dessus de 600 hPa change beaucoup, notamment à l'aplomb du second coude (coude nord, à gauche sur la figure 5.10), où tout un paquet d'observations du second segment présentent un changement de signe entre  $\mathbf{H}_t\nabla_{x_a}\mathcal{J}$  (fig. 5.5) et  $\nabla_{y_t}\mathcal{J}$  (paquet d'observations indexé 2 sur la figure 5.10).

La différence majeure se détecte dans la partie la plus orientale du déploiement de sondes à 600 hPa (paquet d'observations indexé 3 sur la figure 5.10). Tout un groupe d'observations de température se révèle très sensible alors que  $\nabla_{x_a}\mathcal{J}$  est assez faible à ces endroits.

### 5.4.2 La sensibilité aux observations de vent

Dans le cas des observations de vent, l'effet de l'interpolation entre les variables du modèle (tourbillon et divergence) et les paramètres observés (composantes zonale et méridienne du vent) est plus important: la comparaison entre  $\mathbf{H}_t\nabla_{x_a}\mathcal{J}$  et  $\nabla_{y_t}\mathcal{J}$  (figure 5.11) reste cependant possible, puisque  $\mathbf{H}_t\nabla_{x_a}\mathcal{J}$  (qui utilise le même interpolateur) s'exprime aussi selon les composantes zonales et méridiennes.

Les figures (5.11-a.) et (5.11-b.) donnent la sensibilité de la fonction coût aux observations de vent, pour les composantes zonale et méridienne, respectivement. Si on ne note pas de différence majeure entre le nombre d'observations utilisées entre vent et température: 320 pour les observations de température et 336 pour le vent, dans le cas de ce vol du **G-IV**, les points d'observation du vent et de la température ne sont cependant pas co-localisés sur la verticale.

Un examen attentif des figures (5.11-a.) et (5.11-b.) permet de noter que les valeurs extrêmes de sensibilité concernent la partie sud du vol. De plus, on observe à chaque fois une structure dipolaire sur la verticale. Le maximum de sensibilité positif se situe entre 600 et 800 hPa, le maximum de sensibilité négatif vers 900 hPa.

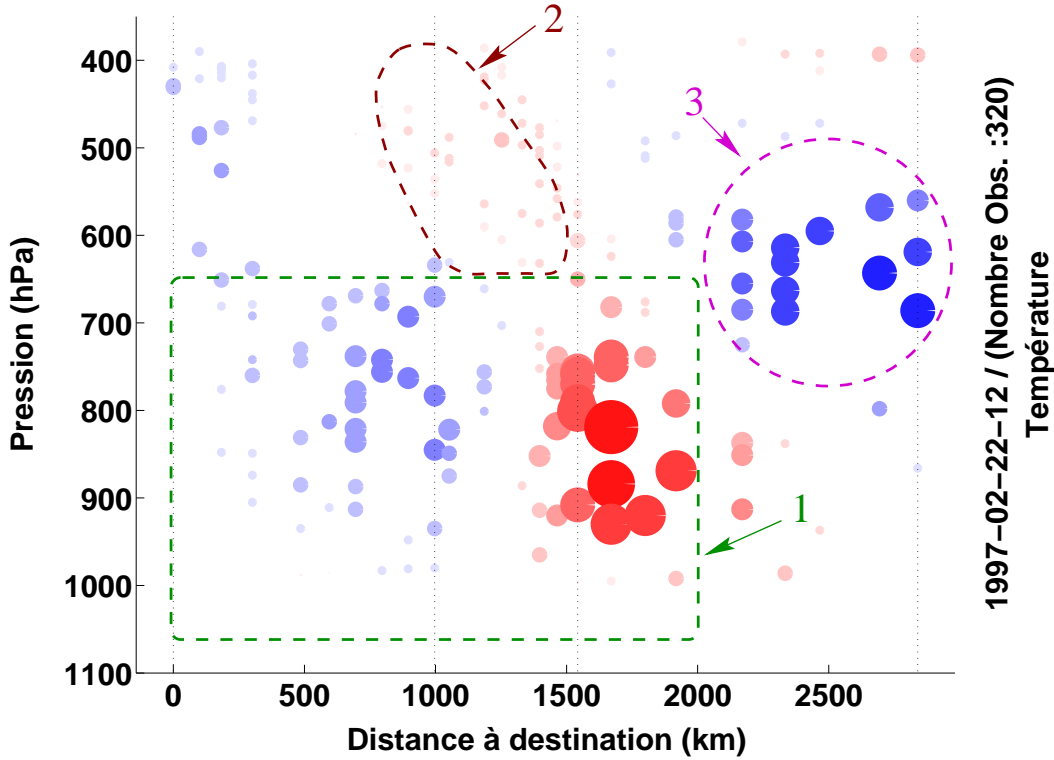


FIG. 5.10: Sensibilité aux observations ciblées de température ( $\nabla_{y_t} \mathcal{J}$ , cf. équation 2.52). Les conventions graphiques sont les mêmes que dans la figure (5.5), les 3 segments sont séparés par un axe vertical tracé en pointillé. Les groupes d'observations remarquables sont entourés de tirets (se référer au texte pour plus de détails). Les valeurs extrêmes de la sensibilité à la température sont:  $Max \simeq 5.8 \times 10^{-8} K^{-1}.s^{-2}$  et  $min \simeq -3.8 \times 10^{-8} K^{-1}.s^{-2}$ .

Nous n'entrerons pas ici dans une comparaison détaillée entre les estimations de  $\mathbf{H}_t \nabla_{x_a} \mathcal{J}$  et  $\nabla_{y_t} \mathcal{J}$ . Cependant, nous signalons sur les figures (5.11) les paquets d'observations qui présentent un changement notable entre  $\mathbf{H}_t \nabla_{x_a} \mathcal{J}$  et  $\nabla_{y_t} \mathcal{J}$ .

En dehors des zones où les observations contribuent assez fortement à la sensibilité et qui changent peu entre  $\mathbf{H}_t \nabla_{x_a} \mathcal{J}$  et  $\nabla_{y_t} \mathcal{J}$ , les modifications des structures sensibles concernent essentiellement des zones de sensibilité modérée. En effet, si les sensibilités conservent leurs poids relatifs, il n'est pas rare de constater un changement de signe de ces sensibilités moyennes ou faibles avec l'application de l'adjoint de l'opérateur d'assimilation ( $\mathbf{K}^T$ ).

Ainsi, les paquets d'observations notés **1** sur les figures (5.11) rassemblent des mesures qui ont une sensibilité équivalente entre  $\mathbf{H}_t \nabla_{x_a} \mathcal{J}$  et  $\nabla_{y_t} \mathcal{J}$ . Les zones notées **2** indiquent à contrario des zones où la sensibilité a changé de signe. De plus, les observations des lots notés **3** présentent un renforcement, parfois même une apparition du caractère sensible marqué (cas des paquets à 600 hPa surtout) entre  $\mathbf{H}_t \nabla_{x_a} \mathcal{J}$  et  $\nabla_{y_t} \mathcal{J}$ . Enfin, les régions annotées **4** signalent des zones où des sensibilités marquées dans  $\mathbf{H}_t \nabla_{x_a} \mathcal{J}$  disparaissent dans  $\nabla_{y_t} \mathcal{J}$ . Ces régions se situent en général, juste sous les maxima de sensibilité aux observations notés **3** en altitude.

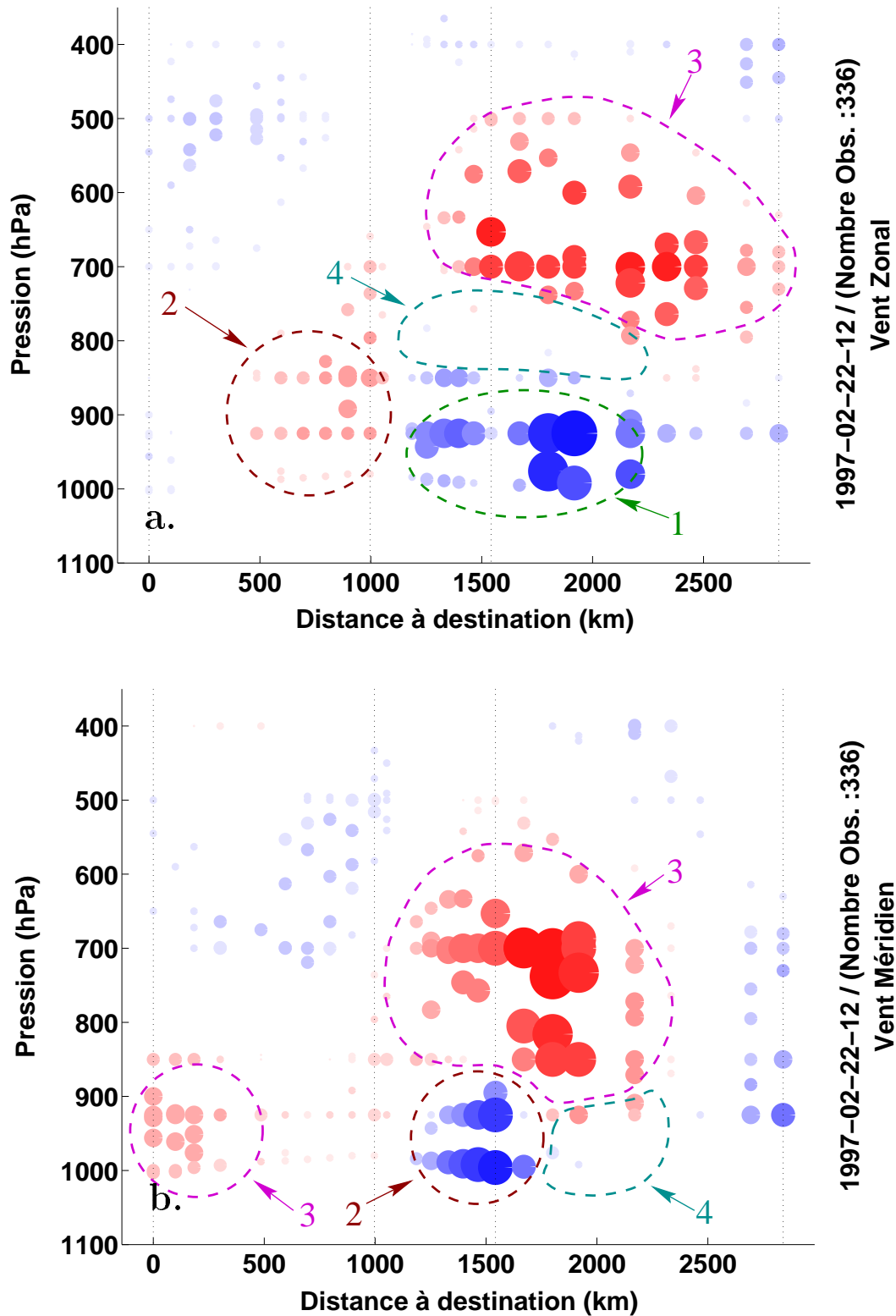


FIG. 5.11: *Sensibilité aux observations ciblées de vent. La figure (a.) représente la composante zonale, (b.) la composante méridienne. Les valeurs extrêmes de sensibilité au vent zonal sont :  $Max \simeq 1.6 \times 10^{-8} m^{-1}.s^{-1}$  et  $min \simeq -2.5 \times 10^{-8} m^{-1}.s^{-1}$ . Les valeurs extrêmes de sensibilité au vent méridien sont :  $Max \simeq 2.4 \times 10^{-8} m^{-1}.s^{-1}$  et  $min \simeq -1.9 \times 10^{-8} m^{-1}.s^{-1}$ . Les zones cernées de tirets rassemblent des observations qui ne présentent pas la même sensibilité que dans  $H_t \nabla_{x^a} \mathcal{J}$ , cf. texte.*



En conclusion sur la sensibilité aux observations de vent il faut souligner l'importance des observations situées dans la partie sud du premier segment du vol et entre 800 et 600 *hPa*. En effet, ces observations n'apparaissent pas du tout sur les cartes de  $\mathbf{H}_t \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  (non représentées) desquelles on pourrait conclure que ce sont des observations placées en dehors des zones sensibles. Le fait de tenir compte de l'algorithme d'assimilation de données dans les processus adjoints permet de montrer au contraire que ces observations ont un très fort potentiel et peuvent se révéler cruciales pour la bonne prévision dans la région de vérification qui nous intéresse. C'est par l'effet des fonctions de structure de l'assimilation que ces observations peuvent agir directement sur les zones de sensibilité définies par  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}$ .

## 5.5 Contribution des observations ciblées à la prévision

Une propriété de la sensibilité aux observations, de par le caractère linéaire de ce calcul, est de nous permettre d'avoir une vue directe sur la façon dont chaque observation est utilisée dans le processus d'assimilation et quelles en sont les conséquences dans la prévision de  $\mathcal{J}$  qui s'en suit. C'est donc un moyen de voir si les observations additionnelles ont pu être utilisées correctement et d'évaluer si leur potentiel informatif sur la réalité de l'atmosphère a bien été utilisé.

Ce potentiel est donné par la sensibilité de la prévision aux observations, justement. Il est l'expression du contexte météorologique de la situation et de l'aspect étudié dans la prévision (au travers de la fonction coût) ainsi que du système d'assimilation (algorithme et déploiement des observations utilisées).

Mais l'effet des observations sur la fonction coût  $\mathcal{J}$  finale est aussi fonction des erreurs de l'ébauche. Cette information n'est cependant connue qu'au travers de formulations statistiques ( $\mathbf{B}$ ) et du vecteur d'innovation, disponible a posteriori. De plus, la sensibilité aux conditions initiales donne les régions où les erreurs de conditions initiales ont un effet dramatique sur la prévision de  $\mathcal{J}$  et non pas les régions où ces erreurs ont lieu ! L'absence de fortes erreurs sur le champ de l'ébauche dans une région donnée, n'implique pas nécessairement que cette zone n'est pas sensible.

Même si ces différentes sources d'information ne sont pas indépendantes, l'impact des observations additionnelles se situe au carrefour de celles-ci. Nous allons donc croiser ces différentes sources, afin d'examiner la bonne utilisation du potentiel des observations ciblées. En effet, compte tenu de la définition de la sensibilité aux observations, une variation de la valeur observée pour une observation donnée aura d'autant plus d'effet en terme de variation de la fonction coût que cette fonction  $\mathcal{J}$  est sensible à l'observation concernée.

Dans le cas des observations ciblées, en utilisant la variation  $\delta \mathbf{y}_t = \mathbf{d}_t$  sur les observations, la variation de  $\mathcal{J}$  se calcule linéairement comme suit (elle provient de l'équation 3.30) :

$$\delta \mathcal{J}_t = \langle \mathbf{d}_t; \nabla_{\mathbf{y}_t} \mathcal{J} \rangle \quad (5.2)$$

où  $\nabla_{\mathbf{y}_t} \mathcal{J}$  est la sensibilité aux observations ciblées (indice  $t$ ) et  $\mathbf{d}_t$  est l'innovation correspondant à ce groupe d'observations ( $\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - H_t(\mathbf{x}^b)$ ). Le calcul de  $\delta \mathcal{J}_t$  permet d'évaluer, sous

l'hypothèse linéaire, combien les observations ciblées ont influencé la prévision.

Dans le cadre du ciblage, on se propose d'étudier les effets sur  $\mathcal{J}$ , de différentes observations qui nous intéressent. On peut remarquer que des termes peuvent se compenser dans le calcul de  $\delta\mathcal{J}_t$  (cf. article (Doerenbecher et Bergot, 2001) de la partie 4.2). L'effet de certaines observations peut être contrebalancé par l'effet d'autres observations du même déploiement. Par une utilisation efficace des observations ciblées, ce genre de résultat devrait pouvoir être évité. Pour déceler ce processus il est possible de définir une fonction qui permet de décomposer la contribution de chaque observation ciblée à  $\delta\mathcal{J}_t$ . En effet, le calcul de  $\delta\mathcal{J}_t$  pour les observations ciblées est équivalent à faire la somme suivante :

$$\delta\mathcal{J}_t = \sum_{i=1}^{i=N_{\mathbf{y}_t}} \mathbf{d}_{ti} \nabla_{\mathbf{y}_{ti}} \mathcal{J} \quad (5.3)$$

où  $N_{\mathbf{y}_t}$  est le nombre d'observations ciblées,  $\mathbf{d}_{ti}$  est l'innovation pour l'observation ciblée  $i$  notée  $\mathbf{y}_{ti}$  et  $\nabla_{\mathbf{y}_{ti}} \mathcal{J}$ , la sensibilité qui y correspond. La fonction de contribution à l'impact des observations ciblées considère le vecteur  $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$  suivant

$$\mathcal{J}\mathcal{C}_t = [\mathbf{d}_{ti} \nabla_{\mathbf{y}_{ti}} \mathcal{J}]_{i=1, N_{\mathbf{y}_t}} \quad (5.4)$$

des éléments intervenant dans la somme (5.3).

Les figures (5.12) à (5.13) représentent avec les mêmes conventions graphiques que les figures (5.10) et (5.11), les éléments du vecteur  $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$  (fonction de contribution à l'impact) pour les observations ciblées de température et de vent (respectivement) du vol du **G-IV** lors de la POI18.

La fonction de contribution à l'impact ( $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$ ) peut être utilement comparée à la sensibilité aux observations ciblées. Comme la sensibilité montre le potentiel d'une observation à influencer l'analyse puis la prévision dans le sens de l'aspect (ici l'enstrophie de basse couche au large de l'Irlande) auquel on s'intéresse, la fonction  $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$  de contribution à l'impact indique quelle utilisation il a été fait de cette potentialité au cours du processus d'assimilation. L'activation de cette potentialité n'est autre que l'écart entre valeurs observées et ébauche dans le modèle (ie. le vecteur d'innovation  $\mathbf{d}_t$ ).

### 5.5.1 Contribution des observations de température

L'examen de la contribution à l'impact des observations ciblées de température représentée sur la figure (5.12) montre que la contribution des observations à très forte sensibilité dans le sud du vol (premier coude) en dessous de 700 *hPa* ne prédomine plus autant dans la fonction  $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$ . Les observations du troisième segment se révèlent tout aussi remarquables du point de vue de cette contribution. Il faut tout particulièrement noter les fortes valeurs pour les observations d'altitude des dernières sondes du déploiement (les plus à gauche, zone numérotée **2** sur la figure 5.12).

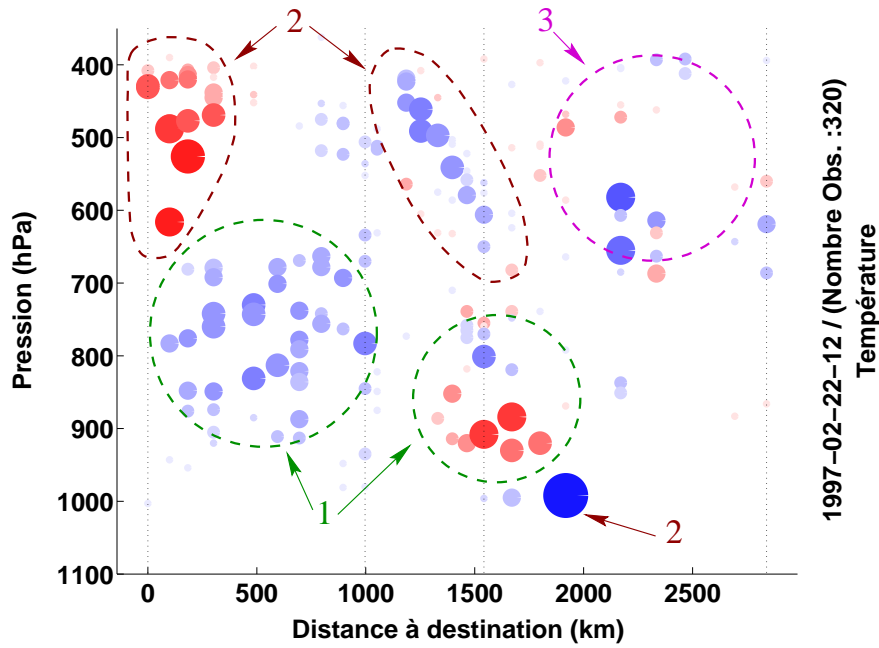


FIG. 5.12: Contribution à l'impact sur la fonction coût  $\mathcal{J}$  par les observations ciblées de température. Les éléments du vecteur  $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$  (cf. équation 5.4) sont représentés au point de l'observation correspondante (distance à destination du point de largage de la sonde et pression au point de mesure en  $hPa$ ). Les valeurs extrêmes sont :  $Max \simeq 7.0 \times 10^{-8}$  et  $min \simeq -9.3 \times 10^{-8}$  et expriment une variation d'entrophie (unité  $s^{-2}$ ). Les ensembles d'observations numérotés **1** correspondent à des zones de sensibilité marquée sur la figure (5.10). Les éléments notés **2** rassemblent des observations de sensibilité plus modérée mais non négligeable et à forte contribution. La zone **3** de faible contribution correspond pourtant à des sensibilités marquées.

On relève aussi la présence d'une structure cohérente fortement inclinée entre 400 et 600  $hPa$  le long du second segment (zone numérotée **1** sur la figure 5.12).

Cependant, le groupe d'observations à forte potentialité à 600  $hPa$  dans la partie la plus orientale du déploiement ne contribue que faiblement (zone numérotée **3** sur la figure 5.12). De plus, il n'y a pas d'unité de signe de contribution au sein de ce groupe dont les effets semblent être compensatoires entre eux. Enfin, on attirera l'attention du lecteur sur la très forte, mais atypique, contribution d'une observation de basse couche dans ce premier segment (observation numérotée **2**). Il s'agit de la sixième dropsonde lâchée par le **G-IV**.

Les motifs présentés par cette fonction de contribution  $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$  se révèlent bien différents de ceux des structures sensibles. Plus complexes, ils illustrent surtout la combinaison des écarts existants entre l'ébauche et les observations et la sensibilité aux observations. Cette sensibilité transparait ainsi dans les zones numérotées **1** sur la figure 5.12). Les autres structures telles que celles annotées **2** relèvent d'une sensibilité modérée et d'un fort écart entre observations et l'ébauche.

### 5.5.2 Contribution des observations de vent

Dans le cas du vent zonal, on a une meilleure correspondance entre les observations à forte sensibilité et les observations qui contribuent notablement à  $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$  (ensembles d'observations annotés **1** sur les figures 5.13). C'est la région précédent le premier coude du vol qui comporte les observations dont la contribution est la plus remarquable (entre 500 et 700 *hPa*), on a souligné cet ensemble d'observations sur la figure correspondante. C'est le paquet supérieur annoté **1** sur la figure (5.13-a.). Les observations d'altitude des dernières sondes semblent prendre plus de poids dans  $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$  que ne le laissent supposer les sensibilités à ces observations (ouest et gauche de la figure (5.13-a.), ensemble d'observations noté **4**).

En matière de composante zonale comme pour la composante méridienne, l'interprétation n'est pas des plus aisées. Afin de synthétiser, on rapporte que les observations de forte contribution à  $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$  sont essentiellement extraites de groupes d'observations cohérents caractérisés par une sensibilité importante (ensembles annotés **1** sur les figures 5.13). Même si la contribution à l'impact n'est pas maximum (au sens de l'exploitation du potentiel des observations donné par la sensibilité) il y a presque toujours à la source une sensibilité (un potentiel) ou forte ou au moins modérée.

#### Conclusion sur la fonction de contribution

La contribution à l'impact permet de mettre en évidence des structures qui sont, soit liées à la sensibilité, soit à l'innovation. D'une façon synthétique, cette fonction de contribution montre quelle utilisation il a été faite de la potentialité des observations par le système d'assimilation prévision.

Il est intéressant de distinguer entre les observations qui contribuent fortement soit parce que la sensibilité est très marquée, soit parce que l'écart entre les mesures et l'ébauche est particulièrement grand. L'examen des écarts entre les observations ciblées et l'ébauche ( $\mathbf{d}_t$ ) se révèle utile soit afin de détecter le potentiel écho de structures cohérentes de  $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$  dans  $\mathbf{d}_t$ , soit afin de détecter des contributions suspectes dans  $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$ . En effet, si l'ébauche contient des erreurs assez importantes (plus importantes que l'écart type des erreurs d'observations), il est possible que l'on puisse les identifier grâce à l'innovation, malgré le bruit de ce champ.

## 5.6 Étude des écarts entre observations et ébauche

Dans un premier temps de cette étude, nous relèverons les particularités des champs d'innovation qui permettent d'illustrer les structures notables que nous avons décelées dans la contribution à l'impact des observations (cf. fig. 5.12 et 5.13).

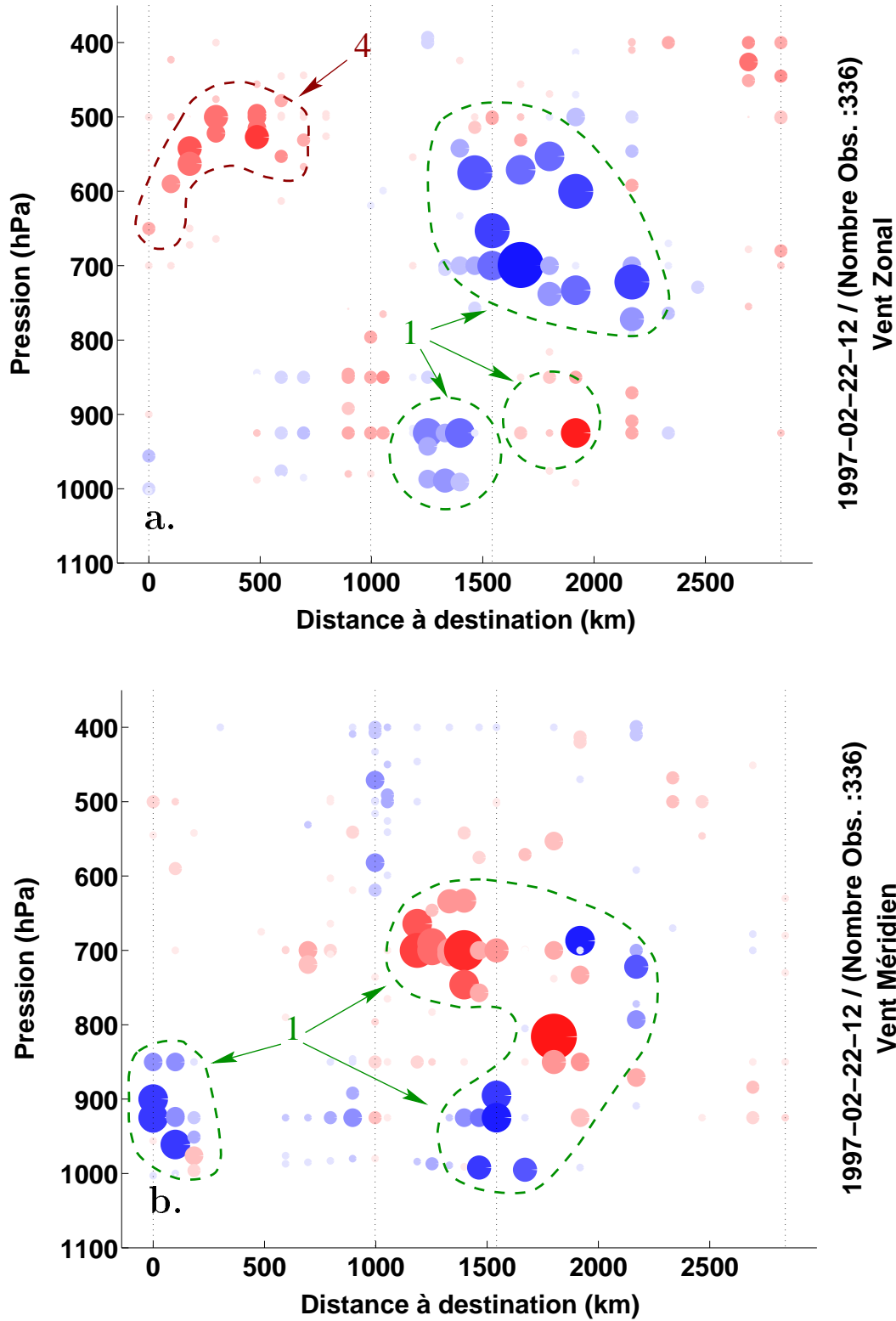


FIG. 5.13: Contributions à l'impact sur la fonction coût  $\mathcal{J}$  (enstrophie) par les observations ciblées de vent. (a.) représente les éléments de  $\mathcal{J}_{C_t}$  (cf. équation 5.4) correspondant à la composante zonale du vent; (b.) contient les éléments relatifs à la composante méridienne. Les valeurs extrêmes des contributions par le vent zonal sont:  $Max \simeq 8.5 \times 10^{-8} s^{-2}$  et  $min \simeq -1.2 \times 10^{-7} s^{-2}$ . Les valeurs extrêmes des contributions dues au vent méridien sont:  $Max \simeq 1.2 \times 10^{-7} s^{-2}$  et  $min \simeq -9.0 \times 10^{-8} s^{-2}$ . Les structures remarquables entourées de tirets numérotées 1 correspondent à des zones de sensibilité marquée sur la figure (5.11). La zone notée 4 relève d'une sensibilité plus modérée.

Dans un second temps, nous chercherons à élucider certaines questions surgies de l'examen des champs d'innovation. Pour cela, nous ferons une inter-comparaison avec des données d'autres origines comme des sondages du réseau conventionnel suffisamment proches des sondages du **G-IV** pour y être comparés ou encore d'autres observations spéciales de la campagne FASTEX, comme les sondages de navires (cf. figure (5.1) dans la partie 5.1.2).

### 5.6.1 Champs d'innovation

#### Innovation de température (figure 5.14)

Sur la figure (figure 5.14) qui représente l'innovation des observations ciblées de température, on constate la présence de trois zones bien précises du vol où les valeurs de l'innovation de température sont très fortes. Elles peuvent y atteindre plus de six degrés d'écart entre les observations et l'ébauche. Par ailleurs, on note très clairement la présence d'une zone sans observations de température au cœur du dernier segment pour des altitudes entre 600 *hPa* et 500 *hPa*, des kilomètres 200 et jusqu'au second coude (1000 *km*).

Sur toute la longueur du vol, au-dessus de 500 *hPa*, l'écart à l'ébauche est négatif, ce qui signifie que l'atmosphère est plus chaude dans l'ébauche que dans la réalité observée par les dropsondes. Ponctuellement, notamment dans le second segment, des écarts positifs, plus faibles en amplitude, se détectent au-dessus et en dessous d'une ligne d'écarts négatifs remarquable par son inclinaison vers le sud (cf. axe numéroté **2** sur la figure 5.14). Il est intéressant de noter que cette structure bien identifiée se retrouve dans la sensibilité aux observations ciblées (cf. figure 5.10) et en conséquence, dans la fonction de contribution  $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$  (fig. 5.12).

À la fin du vol du **G-IV**, on notera que 4 dropsondes sont plus chaudes que l'ébauche (innovation positive) entre 600 et 950 *hPa*; par contre, elles sont nettement plus froide que celle-ci pour les observations les plus basses (cf. cadre numéroté **1** sur la figure 5.14). Ces forts écarts n'ont pas de traduction en matière de contribution à l'impact sur la fonction coût  $\mathcal{J}$  car la partie inférieure de ces dropsondes rassemble des observations qui ont un très faible potentiel en matière de sensibilité.

Enfin, les mesures de température au-dessus de la mer, dans la partie méridionale du vol, juste avant et après le premier coude (à environ 1500 *km* sur la figure 5.14), présentent aussi des écarts négatifs avec l'ébauche et qui semblent curieusement importants: l'ébauche est beaucoup plus chaude que les observations (cf. cadre numéroté **3** sur la figure 5.14). Si la plupart de ces écarts de température n'ont pas d'écho dans la contribution à l'impact ( $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$ ), ce n'est pas le cas de la première de ce groupe (dans le sens du vol et la plus à droite, à environ 2000 *km* du point de destination). La sensibilité y est suffisante pour que la contribution à l'impact de cette observation apparaisse comme la plus forte contribution de toutes les mesures de température de ce vol.

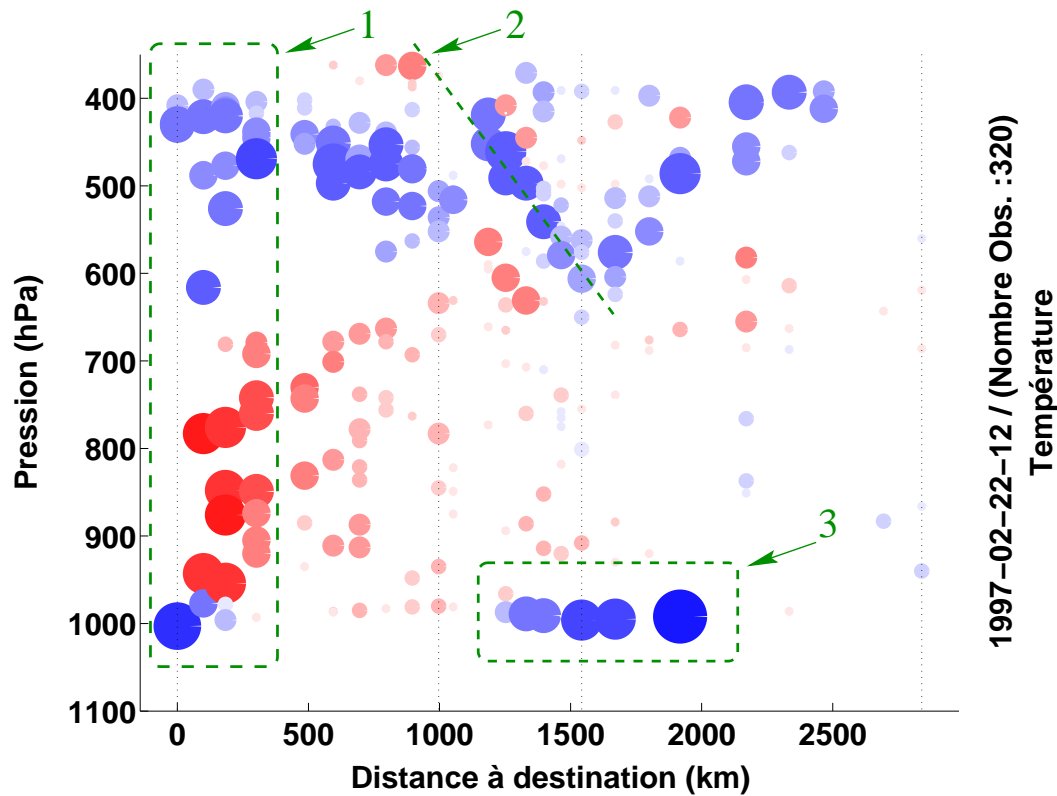


FIG. 5.14: Écarts entre observations ciblées de température et les valeurs de l'ébauche interpolée en ces points. Valeurs extrêmes :  $Max \simeq 5.2 K$  et  $min \simeq -6.1 K$ . Les zones particulièrement intéressantes ont été mises en valeur par des cadres en tirets.

1 : Dernières sondes du vol, de fortes erreurs sont présentes sur toute la verticale.

2 : Structure inclinée du second segment.

3 : Forts écarts en basse couche.

On ne s'explique pas cet écart par l'examen direct de champs météorologiques. Une inter-comparaison avec d'autres données est nécessaire pour discriminer entre deux interprétations possibles : question d'erreur dans l'ébauche ou dans les observations.

### Innovation de vent

Dans le cas du vent, nous décomposons l'étude selon les deux composantes (zonale et méridienne).

Dans le cas du vent zonal (cf. figure 5.15-a.), on note que les forts écarts se situent au-dessus de  $600 hPa$ . Ceux-ci sont majoritairement négatifs, c'est-à-dire que le vent décrit dans l'ébauche a une composante zonale plus forte que les observations. Le second segment du vol laisse apparaître des écarts positifs en basse couche. Dans l'ensemble on note que les plus forts écarts de cette composante se situent dans la même zone d'altitude que pour les observations de température et qu'on retrouve la structure fortement inclinée dans le second segment entre  $600$  et  $400 hPa$ .

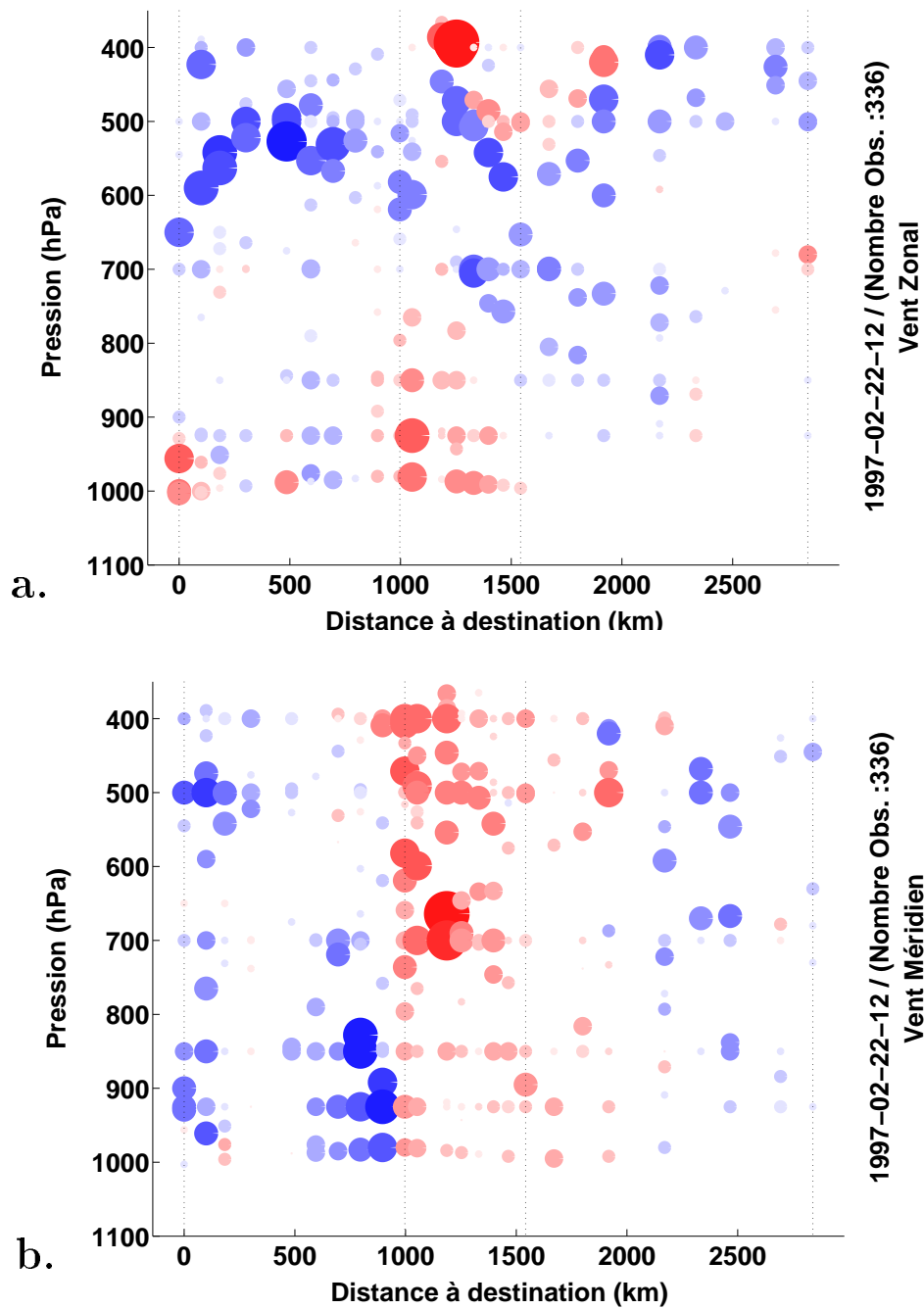


FIG. 5.15: Écarts entre les observations ciblées de vent et les valeurs de l'ébauche interpolées en ces points. (a.) représente la composante zonale, (b.) montre la composante méridienne. Les valeurs extrêmes d'innovation de vent zonal sont :  $Max \simeq 14.3 \text{ m.s}^{-1}$  et  $min \simeq -13.5 \text{ m.s}^{-1}$ . Les valeurs extrêmes d'innovation de vent méridien sont :  $Max \simeq 14.6 \text{ m.s}^{-1}$  et  $min \simeq -11.9 \text{ m.s}^{-1}$ .



Dans le cas de la composante méridienne (cf. figure 5.15-b.), la situation est toute autre, les signes de l'innovation se mêlent très peu dans leur répartition spatiale. On est loin de constater quelque bruit qui serait dû aux erreurs d'observation. Le signe des écarts apparaît comme étant dépendant du segment du vol, surtout pour les deux derniers (les plus à gauche sur la figure 5.15). Le premier segment ne présente pas un tel aspect singulier. Peut-on suspecter un biais des observations? Ce biais serait alors dépendant du segment de vol! L'hypothèse est séduisante, mais un examen plus fin de la figure (5.15-b.) montre que des écarts positifs sont présents pour les observations d'altitude au début du dernier segment alors que tous les autres écarts sont clairement négatifs. Ce fait concernant plusieurs observations groupées, il ne s'agit sans doute pas de problème de mesure, mais bien d'une erreur dans l'ébauche.

On est en droit de suspecter la qualité des observations (mesure de vent par système GPS, Geneviève Jaubert, communication personnelle) bien que les mesures issues de dropsondes soient parmi les meilleures (avec les radiosondages) que l'on puisse générer en observations d'altitude in situ.

Afin de vérifier la présence de dropsondes problématiques, on se propose de comparer les mesures du *G-IV* avec celles d'autres plates-formes dont la position spatio-temporelle et l'occurrence de prise de mesures nous permette d'obtenir une troisième source d'information afin d'essayer de trancher sur la question qui subsiste après l'examen du vecteur d'innovation: "erreur d'observation ou erreur de l'ébauche?"

### 5.6.2 Comparaison des mesures de température du *G-IV* à d'autres observations indépendantes du vol.

#### Les données impliquées

Les autres données de température intéressantes dont on dispose sur cette situation sont essentiellement des radiosondages, soit terrestres, soit effectués depuis des bateaux. Les sites de radiosondage sélectionnés sont les suivants :

- Sondage du sud du Groenland - *OMM04270* (61.16°Nord et 45.44°Ouest)
- Sondage de Goose Bay - *OMM71816* (53.3°Nord et 60.3°Ouest)
- Sondage de Sable Island - *OMM71600* (43.9°Nord et 60°Ouest)
- Sondage de St-Johns - *OMM71801* (47°Nord et 55°Ouest)

Les bateaux utiles pour notre étude comparative sont ceux déployés spécifiquement pour la campagne et dont nous avons déjà signalé l'existence au début de ce chapitre. Au plus près de la trajectoire du *G-IV*, on trouve les deux navires suivants :

- Le Knorr - *OMMKCEJ* (NOAA) (positionné à 56.5°Nord et 56.5°Ouest)

- Le Suroît - *OMMFZVN* (France) (positionné à 48°Nord et 41°Ouest)

Les positions de ces sites, relativement au déploiement du *G-IV* sont représentées sur la carte de la figure (5.16).

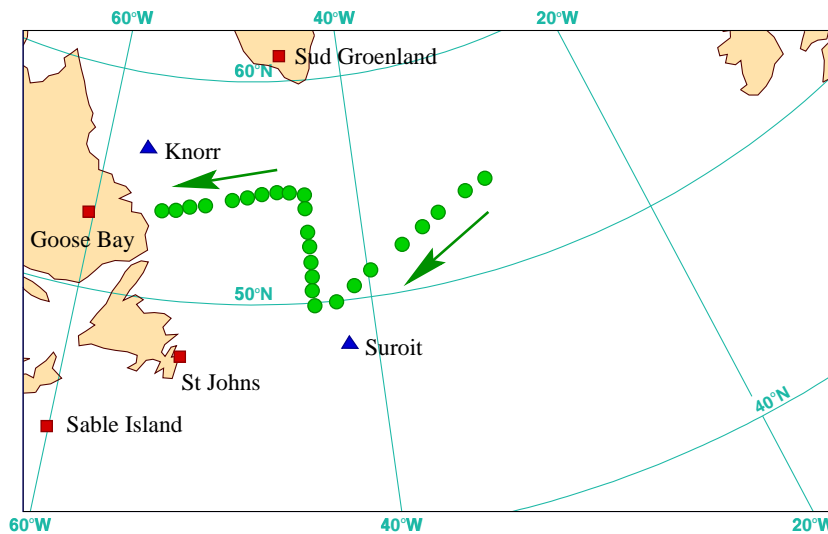


FIG. 5.16: Répartition géographique des sondes du *G-IV* (ronds), des navires (triangles) et des stations (carrés) utilisées dans l'inter-comparaison des mesures et de l'ébauche du modèle. La flèche donne le sens du vol du *G-IV*.

Les sondages réalisés sur le continent américain (Terre-Neuve et Canada) nous renseignent sur la fin du vol. C'est aussi le cas des observations du Knorr, qui se situe au large de Goose Bay qui est la destination du *G-IV*.

Le sondage du sud du Groenland peut être utilisé pour valider les observations faites autour du second coude (le plus au nord) du déploiement des dropsondes. Les mesures du Suroît servent, quant à elles, d'étalon pour les observations du premier coude (partie sud du vol).

Une certaine prudence est nécessaire dans cette comparaison. En effet, les données confrontées ne représentent pas exactement la même réalité au sens où en plus d'un décalage géographique, il existe aussi un décalage temporel entre les mesures des différentes plates-formes. Les données du vol sont réparties sur la plage temporelle débutant dès 10h TU (première sonde à l'est) et se terminant à 13h30 TU. Pour les stations terrestres hors déploiement spécifique à la campagne FASTEX, les mesures sont effectuées peu avant 12h TU. Ainsi il y a environ 90 minutes de décalage entre la dernière sonde du *G-IV* et le sondage de S<sup>t</sup>-Johns. Par contre, les stations de Goose Bay et de Sable Island ont effectué leurs mesures à d'autres horaires, plus tôt, soit vers 11h15 TU. Ce qui augmente encore le décalage temporel avec les sondes du *G-IV*.

En ce qui concerne les navires, le sondage du Suroît est effectué peu de temps après le passage de l'avion, vers 11h30. Le Knorr a envoyé des sondes avant et après le passage de l'avion avec un décalage d'une trentaine de minutes. Ces données de navires ont donc été utilisées en priorité dans notre étude comparative.

### Comparaison avec les radiosondages du Knorr et de Goose Bay : étude de la fin du vol du G-IV

La figure (5.17) montre un émagramme pour l'avant-dernière sonde du G-IV qui est représentative du problème que nous avons détecté sur l'innovation (cf. figure (5.14), lot d'observations indexé 1).

Nous avons effectué les constats suivants. Un phénomène d'inversion en basse couche est absent du profil de l'ébauche. Tout le profil mesuré est très différent jusqu'à 600 *hPa*. La conséquence est un décalage des altitudes auxquelles change le gradient vertical de température (décalage des points caractéristiques) par rapport à l'ébauche. Pour la dernière sonde (non montré), ceci entraîne un rejet de nombreuses mesures par le processus d'écémage. Seule la mesure de température à la base et celles au-dessus de 350 *hPa* sont conservées dans le processus variationnel.

Le sondage de Goose Bay marque encore plus l'inversion qui est un phénomène continental typique en hiver. Mais en ce point, il y a accord avec l'ébauche qui la décrit aussi. Le sondage du Knorr ne décrit pas d'inversion. Même si le gradient vertical de température est plus marqué que celui de l'ébauche, il y a compatibilité entre les données du sondage et l'ébauche.

Les dernières dropsondes sont cohérentes entre elles ainsi qu'avec le sondage de Goose Bay. Celles qui ont été lâchées plus tôt, vers le Knorr, sont en accord avec celui-ci. Les observations semblent donc ne pas présenter d'erreurs particulières. Ce serait plutôt l'ébauche qui doit être mise en cause.

Notre interprétation du désaccord entre les observations ciblées et l'ébauche à mi-chemin entre Goose Bay et le Knorr est la suivante. Comme l'expérience se déroule en hiver, il y a une banquise conséquente dans cette région, mais le Knorr se situe en mer libre. Sur la banquise, la couche limite est de type continental (inversion dans notre cas). Or le modèle utilisé à l'époque (ainsi que pour ces expériences de sensibilité aux observations) ne gère pas la présence de la banquise. Ce sont là des considérations de surface, mais du fait de l'extension verticale de l'inversion, l'effet se porte ainsi assez haut en altitude (600 *hPa*). De plus on sait que la transition entre les couches limites de terre et mer est difficile à modéliser, et que celle-ci se fait avec une certaine inertie. Ceci expliquerait le continuum d'écarts positifs le long du dernier segment du vol.

Comme pour la dernière sonde du vol, la conséquence de ce décalage vertical du gradient vertical de température (qui est maximum vers 600 *hPa*) est le rejet de nombreuses observations par la phase d'écémage de l'assimilation. Ceci explique pourquoi on détecte ce "trou" d'observations de température sur la figure (5.14) cerné par de très fortes valeurs positives d'innovation en dessous et négatives au-dessus.

Ce rejet peut paraître aller à l'encontre de la finalité des observations ciblées. En effet, la bonne qualité des mesures effectuées par les observations adaptatives, justifierait sans doute un traitement spécifique de ces observations considérées comme cruciales pour la prévision,

dans la phase d'écrémage des données préalable à leur assimilation.

### Écarts en altitude dans le second segment du vol du G-IV

Cette étude concerne les observations du motif indexé **2** dans la figure (5.14). La figure (5.18) montre l'émagramme pour la douzième sonde du vol (milieu du second segment) qui est bien représentatif de cette zone très dynamique. Il y a coïncidence des forts écarts avec les niveaux de pression où se situe le changement de l'amplitude du gradient de température avec la verticale (inflexion de la courbe de température sur l'émagramme de la figure 5.17).

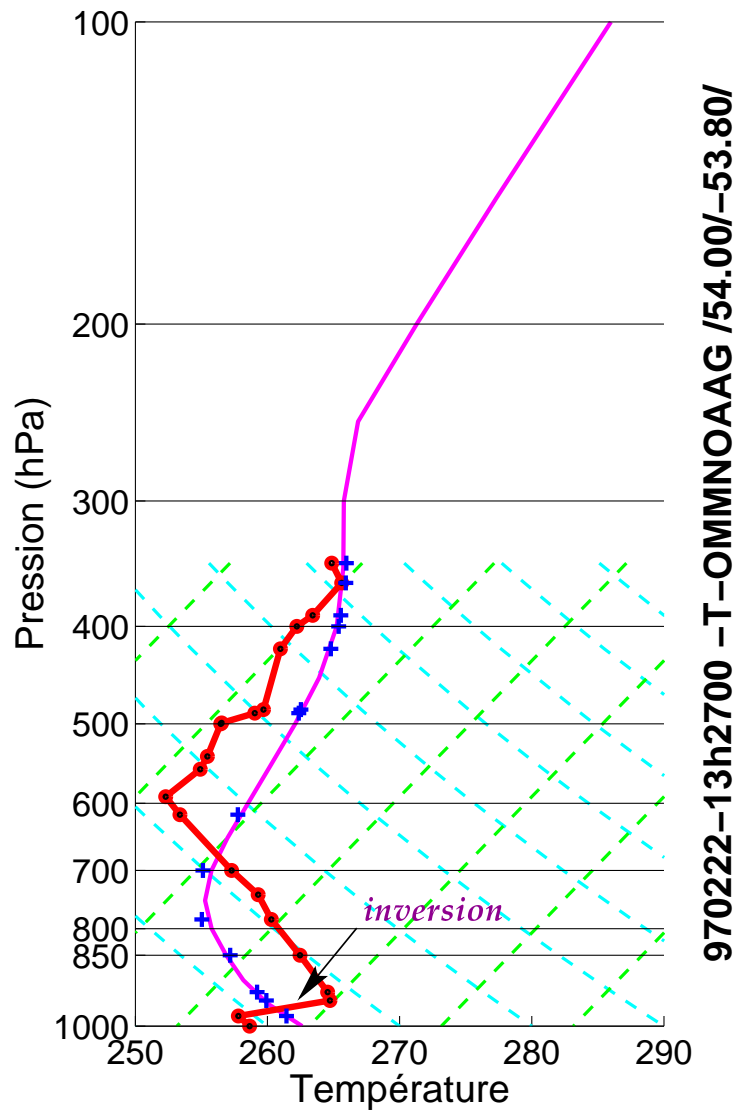


FIG. 5.17: Émagramme de la vingt-quatrième sonde du G-IV, localisée au point  $54^{\circ}$  Nord,  $53.8^{\circ}$  Ouest et lâchée à 13h27 TU. La ligne brisée épaisse représente le sondage observé et les ronds donnent les points de mesure (points caractéristiques). La courbe donne le profil de l'ébauche au point de sondage et interpolé sur les niveaux pression réguliers. Les croix donnent la valeur de l'ébauche aux points des observations utilisées par le processus d'assimilation (la comparaison du nombre de ronds et de croix donne une idée de l'écrémage).

On peut interpréter cette inflexion du profil vertical de température comme la présence de la tropopause dynamique dont l'altitude est différente dans l'ébauche (650 hPa), par rapport aux observations (550 hPa). Il ne s'agit donc pas a priori de quelque biais des observations, mais plutôt d'une erreur de positionnement de cette tropopause dynamique dans l'ébauche.

Le profil vertical de température de la figure (5.17) est complexe. En effet, c'est sur ce second segment que l'on détecte une double foliation de tropopause (Donnadille *et al.*, 2001) alors que la trajectoire du **G-IV** traverse le jet. Cette foliation dédoublée est une spécificité de la POI18: elle est liée au noyau de tourbillon d'altitude intervenant dans la cyclogenèse de *L44*.

Cette intrusion d'air stratosphérique dans la troposphère complexifie la structure du profil vertical de température surtout au nord de ce segment. Ce phénomène est mal décrit dans l'ébauche qui positionne mal une foliation unique (lissage du profil vertical par rapport aux observations). L'inclinaison de cette foliation induit la pente notée sur l'écart observations-ébauche de la figure (5.14, lot d'observations indexé **2**). Ainsi, les foliations ne sont plus guère détectées dans la partie sud et notamment par le sondage du Suroît (cf. figure 5.19).

Dans ce cas, les écarts observations-ébauche traduisent donc une déficience du modèle à correctement décrire la complexité des structures très dynamiques intervenant dans la cyclogenèse explosive de la dépression *L44*.

### Sur-adiabatisation de basse couche : comparaison avec le Suroît

Vers le premier coude du déploiement des dropsondes du **G-IV**, ce sont les très forts écarts de température en surface entre les observations et l'ébauche qui nous intéressent. La dernière observation des dropsondes est systématiquement beaucoup plus froide que l'ébauche et cette différence atteint 6 degrés par endroits (cf. ensemble d'observations indexé **3** dans la figure 5.14).

La figure (5.18) montre le sondage de la douzième dropsonde pour laquelle le même problème que dans le cas de l'observation indexée **2** sur la figure (5.12). On utilisera donc la figure (5.18) pour illustrer que dans la couche limite, ébauche et sonde ont un assez bon accord, voire très bon pour le coude sud (la sixième dropsonde, non représentée). Le profil de température de l'ébauche interpolée sur des niveaux réguliers (ligne fine sur la figure 5.18) est d'ailleurs en accord avec la sonde jusqu'à son point le plus bas. Ce qui est confirmé par l'examen du sondage effectué par le Suroît (cf. figure 5.19). L'ébauche semble donc exempte de biais. En fait, c'est la valeur de l'ébauche interpolée au point de l'observation qui apparaît trop chaude (cf. figure 5.18). C'est un sur-adiabatisation qui apparaît dans l'ébauche interpolée (croix) plutôt que dans l'ébauche elle-même (ligne fine sur la figure 5.18). On constate que ce phénomène du sur-adiabatisation de la valeur de l'ébauche interpolée est aussi présent dans le cas du sondage du Suroît (cf. croix sur la figure (5.19) qui indique une innovation de 3.7 K). Nous en avons calculé l'innovation bien que ce sondage spécifique à la campagne FASTEX n'ait pas été utilisé dans l'expérience d'assimilation. Ceci indique que le 3D-Var est confronté au même problème avec le sondage du Suroît qu'avec les dropsondes du **G-IV**.

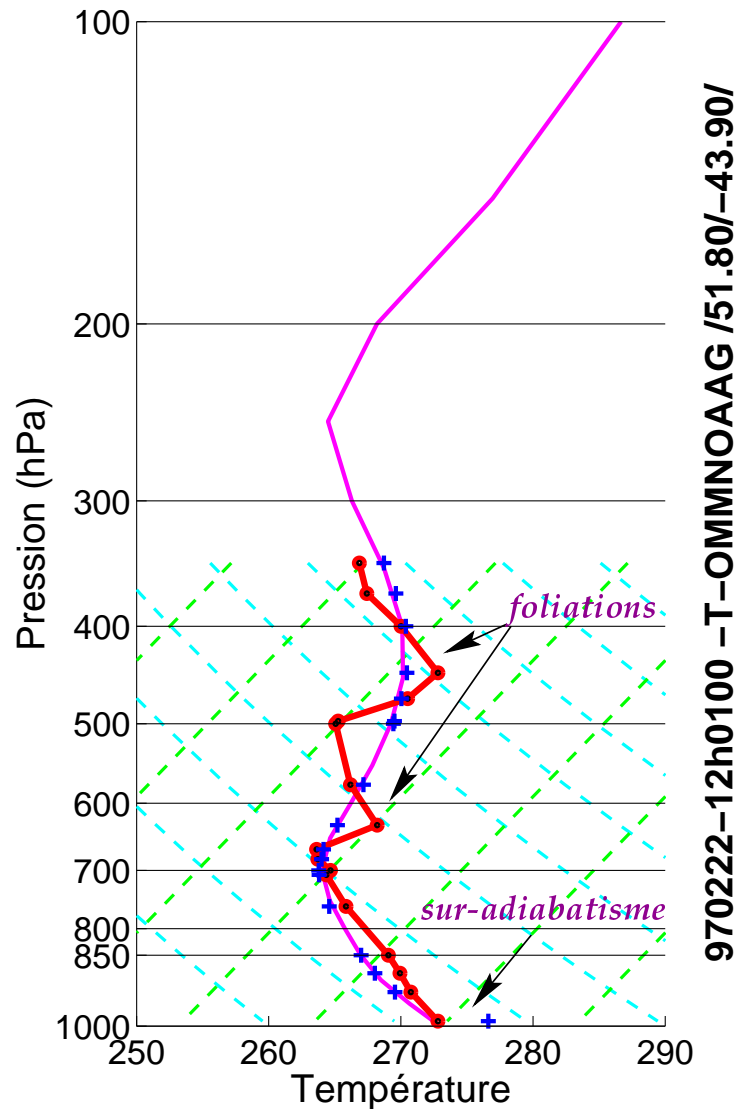


FIG. 5.18: Émagramme de la douzième dropsonde du déploiement du G-IV lâchée par  $51.8^\circ$  Nord et  $43.9^\circ$  Ouest à 12h01 TU. C'est un sondage représentatif du second segment (milieu de celui-ci) qui montre la double foliation de tropopause observée par le G-IV. En regard, une seule foliation est décrite dans l'ébauche. Cette figure fait aussi apparaître le problème de sur-adiabatsisme de l'ébauche par extrapolation sous la pression de surface. Les signifiants graphiques sont les mêmes que ceux de la figure (5.17).

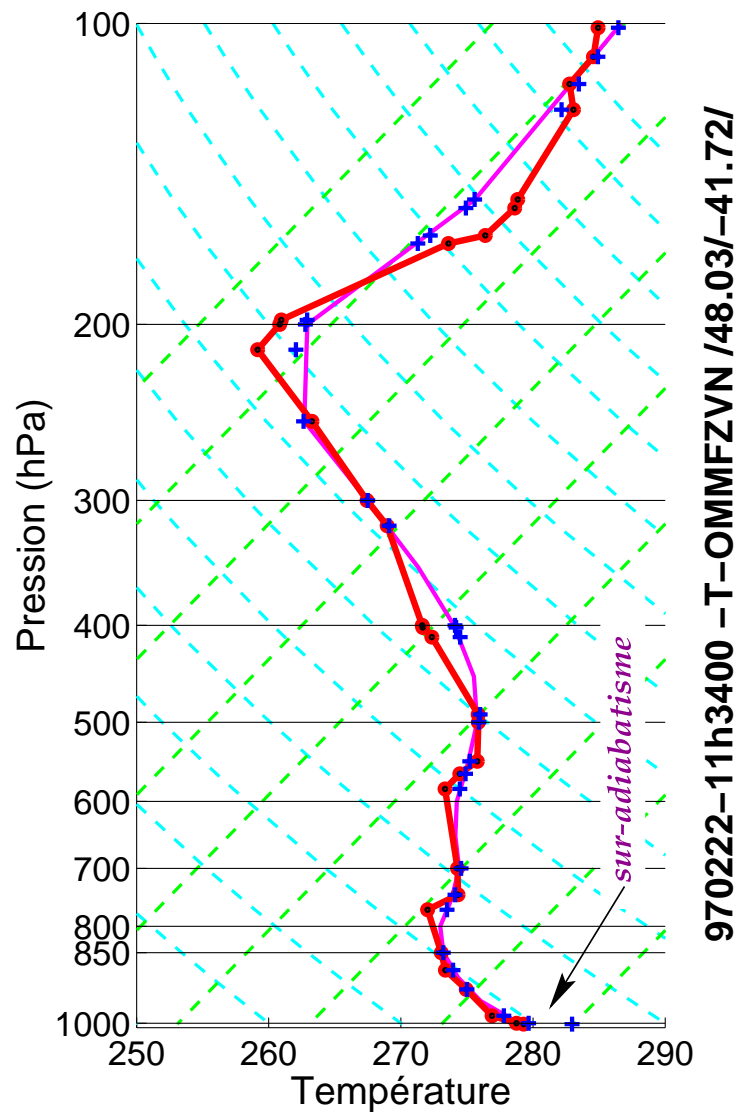


FIG. 5.19: Émagramme du radiosondage du Suroît effectué à 11h34 TU au point 48° Nord, 41.7° Ouest. Mêmes signifiants graphiques que sur la figure (5.17). Les valeurs de l'ébauche interpolées aux points de mesure (croix) sont représentées bien que ce sondage n'ait pas été utilisé dans l'expérience d'assimilation.

Il semble donc qu'il puisse s'agir d'un problème d'interpolation verticale de l'ébauche au point d'observation. Cette opération se fait par comparaison de la pression au point d'observation et des deux niveaux verticaux du modèle qui l'encadrent. Cependant, si la pression mesurée par la sonde est plus élevée que la pression de surface dans l'ébauche, cela signifie que dans le modèle utilisé pour l'assimilation, la mesure de température de la sonde a été effectuée **sous** la surface. Il ne s'agit plus d'une interpolation de la valeur de l'ébauche, mais d'une extrapolation puisque le point d'observation est situé sous la surface dans l'ébauche. Cette particularité peut introduire des erreurs supplémentaires.

La figure (5.20-a.) montre le signe de la différence entre la pression de la dernière mesure de température et la pression de surface de l'ébauche au point de chute de la sonde. Si cette différence est positive, cela signifie que la dernière observation de température est située sous la surface de l'ébauche. L'interpolation verticale sera donc une extrapolation sous la surface de l'ébauche.

En regard, la figure (5.20-b.) montre l'innovation pour la dernière mesure de température tout le long du vol de **G-IV**. Les deux zones problématiques (problème de la banquise et fin du premier segment du vol) apparaissent nettement. La comparaison des figures (5.20-a.) et (5.20-b.) montre une excellente correspondance entre les points où la dernière mesure de température est effectuée en dessous de la surface issue de l'ébauche (points noirs sur la figure 5.20-a.) et les points où les écarts négatifs entre les températures mesurées et les températures issues de l'ébauche sont anormalement élevés (disques gris sur la figure 5.20-b.).

Il semble donc que ce phénomène provienne d'une déficience du système d'assimilation utilisé. Il s'agit d'un problème d'utilisation des observations lorsque la pression du point de mesure est supérieure à la pression de surface dans l'ébauche. Les forts écarts entre les températures mesurées et les températures issues de l'ébauche peuvent être aggravés par une mauvaise description du gradient vertical de température juste au-dessus de la surface dans l'ébauche, car c'est ce gradient qui est utilisé pour extrapoler la température de l'ébauche au point de mesure.

On soulève alors la question de savoir comment bien utiliser ces observations. En effet, la pression observée au point le plus bas d'une dropsonde n'est pas mesurée dans les mêmes conditions que la pression de surface pour un radiosondage ascendant plus classique (dans une station terrestre ou depuis un navire). En effet, une dropsonde chute dans l'eau alors que des mesures de pression supplémentaires viennent confirmer les premières mesures d'un sondage classique. Ce sont pourtant ces mesures de pression des dropsondes dont la fiabilité peut être mise en cause qui sont utilisées pour interpoler l'ébauche. La pression n'est alors plus qu'utilisée comme une méta donnée au même titre que les coordonnées géographiques.



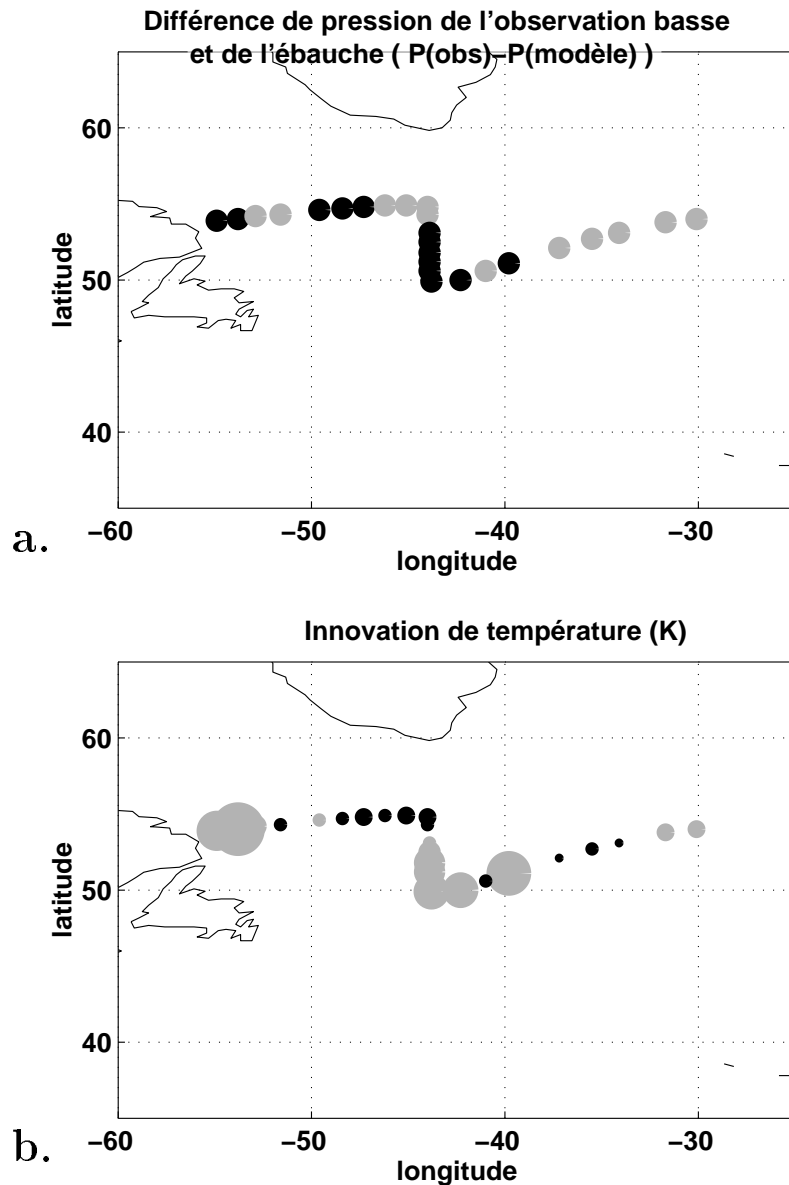


FIG. 5.20: (a.) Représentation du signe des écarts entre la pression mesurée par la sonde du G-IV à l'altitude de la dernière mesure de température et la pression de surface de l'ébauche en ce point. Les points noirs montrent un écart positif (pression du dernier niveau de mesure de température plus élevée que la pression de surface issue de l'ébauche) et les points clairs, un écart négatif; la taille des points est constante.

(b.) Représentation des écarts de température entre les observations ciblées et l'ébauche interpolée (ou extrapolée selon le cas) au niveau pression correspondant. La taille du cercle dépend de l'amplitude de cet écart. Les cercles noirs représentent des valeurs positives, respectivement les cercles gris indiquent des valeurs négatives. Noter la bonne correspondance entre les écarts positifs de pression et les fortes valeurs négatives de l'innovation de température.

Sans remettre en question la qualité des mesures effectuées, ce problème adresse la question des corrélations entre les erreurs d'observations issues d'un même sondage. C'est la formulation de  $\mathbf{R}_t$  qui est remise en question. Par exemple, il serait intéressant de modifier la formulation de la matrice  $\mathbf{R}_t$  (cf. équation 2.51) pour que les variances des erreurs des observations des dropsondes soient plus élevées, en basse couche, que les variances d'erreur d'observations des radiosondages classiques qui sont utilisées pour assimiler les mesures du *G-IV*. Ainsi ces observations difficiles à gérer auraient un poids plus faible dans l'assimilation.

## Conclusion

Une étude comparative entre les sondages effectués par les dropsondes larguées par le *G-IV* et les sondages "denses" réalisés par les bateaux déployés pour la campagne FASTEX, a permis de montrer la qualité des observations de type dropsondes. Les structures remarquables du vecteur d'innovation en température ont été identifiées comme étant liées soit à des problèmes de l'ébauche (erreur modèle) soit à des utilisations peu favorables d'observations placées dans des situations délicates où les observations ciblées ne sont pas assimilées de façon à ce qu'elles puissent apporter tout leur potentiel d'information.

On a ainsi relevé le problème de représentation par le modèle de la couche limite au-dessus de la banquise, de la double foliation de tropopause (dynamique du modèle).

L'outil de sensibilité aux observations nous a aussi permis de détecter l'impact des déficiences du système 3D-Var utilisé pour ces expériences. Ainsi, l'extrapolation de la valeur mesurée sous le dernier niveau du modèle peut conduire à une mauvaise utilisation de l'observation par le système d'assimilation.

### 5.6.3 Étude des mesures de vent

Dans le paragraphe (5.6.1) on a relevé les deux caractéristiques du champ d'innovation de vent. D'une part les écarts entre les mesures et l'ébauche pour la composante zonale au-dessus de 600 *hPa* sont importants sur toute la longueur du vol (cf. fig. 5.15-a.). D'autre part les écarts observations-ébauche de la composante méridienne sur les derniers 2000 *km* (les trois-quarts du vol, en fait) sont assez uniformes en amplitude sur toute la verticale des sondages, mais le signe de ces écarts semble dépendre du segment du vol (écarts négatifs pour le dernier segment et écarts positifs pour le second segment). S'agit-il là encore d'un possible biais des observations ou alors d'erreurs dans l'ébauche?

Compte tenu de ce qu'on a vu sur la représentation des foliations de tropopause pour le paramètre de température dans la partie précédente, les écarts de vent zonal en altitude sont symptomatiques d'erreurs dans l'ébauche dans la description de ces structures dynamiques.

Dans le cas de la composante méridienne, le système d'acquisition de ces mesures de vent

se fait avec un procédé de calcul de déplacement détecté par GPS. L'avion ne transporte pas de détecteur relatif à la sonde : la sonde porte son propre récepteur détecté ensuite par la constellation de satellites. On doit ainsi pouvoir infirmer l'hypothèse d'un lien entre l'orientation de la trajectoire de vol de l'avion et l'innovation dans la composante méridienne puisque la sonde est indépendante de l'avion dès son lâcher.

On se propose de comparer à présent directement le vent observé et le vent de l'ébauche sous forme vectorielle.

Pour comparer de façon efficace le champ de vent observé au champ de l'ébauche, nous avons procédé à la *reciproque* du calcul d'innovation ; c'est-à-dire que plutôt que d'interpoler l'ébauche aux points d'observation dont la répartition verticale irrégulière rend une représentation graphique synthétique difficile (il faut presque effectuer les comparaisons observation par observation), nous avons choisi d'interpoler le vent observé sur des niveaux réguliers de pression. Ainsi nous pouvons représenter les vents des sondes et de l'ébauche aux coordonnées des points de sondage, sur des niveaux de pression échelonnés tous les 50 *hPa*.

Les figures (5.21) montrent les champs de vent de l'ébauche et observés, interpolés aux coordonnées de sondage et aux niveaux de pression 350 *hPa* (fig. 5.21-a.), 500 *hPa* (fig. 5.21-b.), 650 *hPa* (fig. 5.21-c.) et 800 *hPa* (fig. 5.21-d.).

Sur ces figures, on retrouve bien que le maximum de vent est mesuré durant le second segment du vol, alors que le **G-IV** traverse le courant jet, mais aussi lors des dernières sondes du vol, alors que l'avion atteint Goose Bay. Il est alors respectivement au cœur et sur le flanc cyclonique du jet dont le noyau est orienté sud-est. La figure (5.22) montre le cœur du jet (jet streak) dans l'ébauche à 500 *hPa*, relativement à la position des sondes.

L'examen des figures (5.21) apporte des éclaircissements à propos des questions restées sans réponse lors de l'examen de l'innovation de vent, composante par composante. Dans ces quatre figures, le vent de l'ébauche est beaucoup moins cyclonique que le vent observé. Le centre de cette rotation plus marquée dans les observations se trouve au nord-nord-ouest du second coude (selon l'altitude considérée). Les observations ont donc une disposition particulière vis-à-vis de ce centre dépressionnaire. Ainsi, le second segment est dirigé tout droit vers le centre de la dépression et le second coude semble en être très proche, compte tenu du très petit rayon de courbure des vents qui apparaît à 650 *hPa* (figure 5.21-c.). Avec le troisième segment, l'avion s'éloigne du centre dépressionnaire. Les second et troisième segments sont donc majoritairement perpendiculaires au vent dominant.

En ce qui concerne l'altitude (figures 5.21-a. et 5.21-b.), le module du vent observé concorde assez bien avec celui de l'ébauche. L'erreur relative est d'autant plus faible que ces valeurs sont élevées (on est très près du jet).

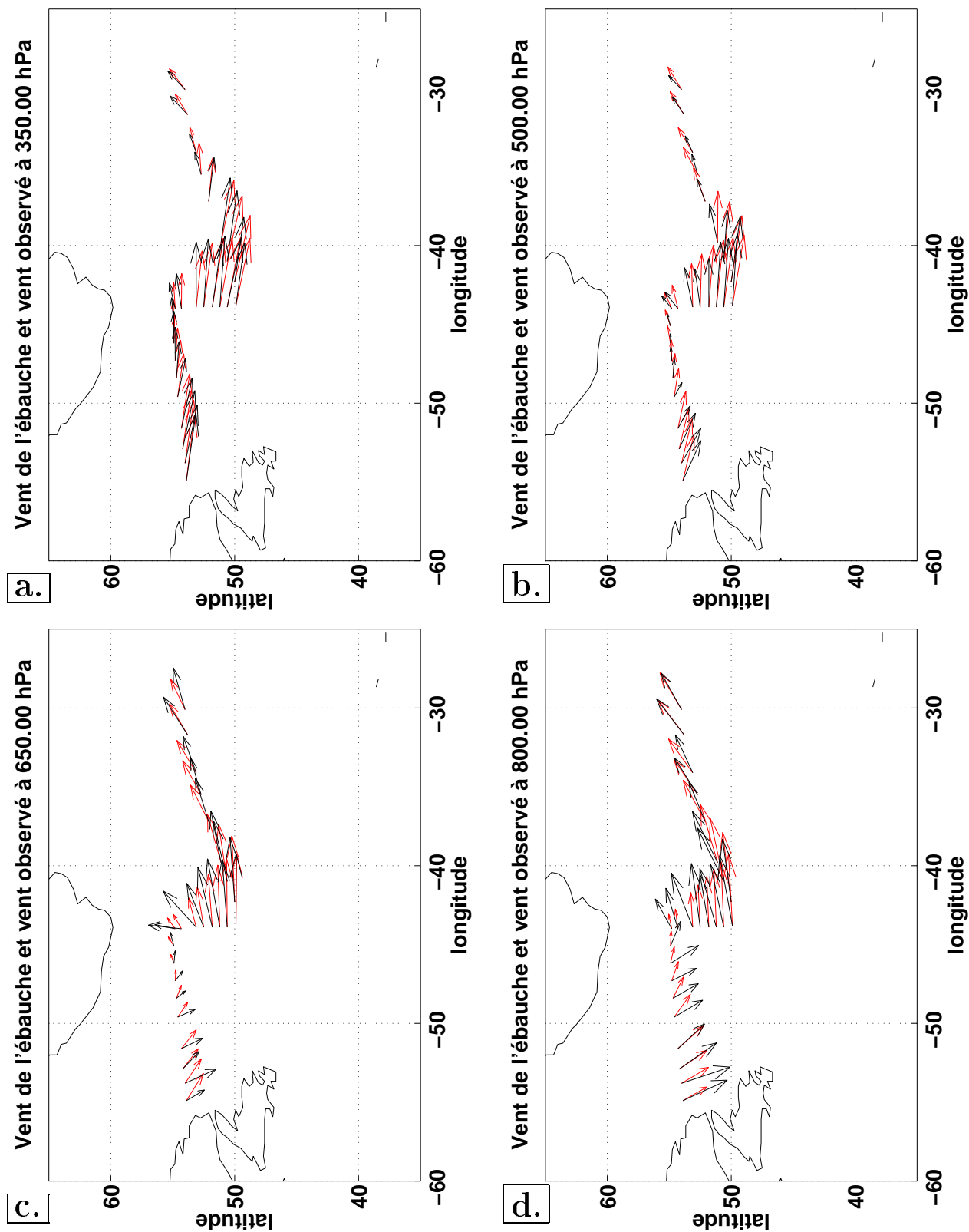


FIG. 5.21: Représentation des vecteurs de vent observés et de l'ébauche interpolés aux niveaux 350 hPa (fig. a.), 500 hPa (fig. b.), 650 hPa (fig. c.) et 800 hPa (fig. d.). Les vecteurs observés sont représentés en noir et les vents de l'ébauche apparaissent en rouge.

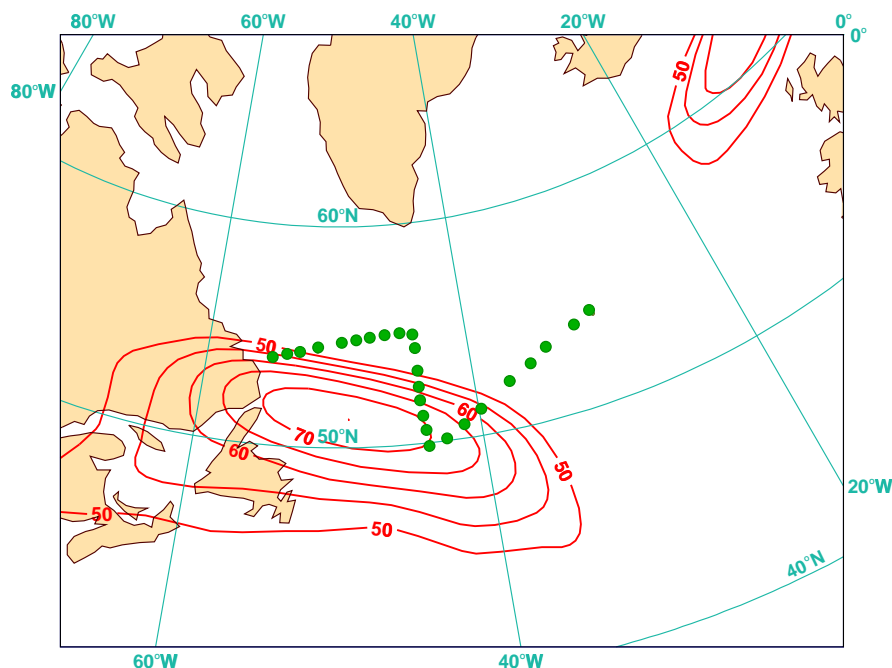


FIG. 5.22: Force du vent dans l'ébauche à 400 hPa, le 22 février à 12h TU. Les contours sont tracés tous les 5  $m.s^{-1}$  à partir de 50  $m.s^{-1}$ . Le maximum (jet streak) atteint 75  $m.s^{-1}$ . Les ronds indiquent le déploiement des dropsondes par le G-IV.

Dans la figure (5.21-d.) l'erreur commise sur le module est plus marquée : sur le dernier segment il n'est pas rare de mesurer un vent deux fois plus fort que celui de l'ébauche.

Sur le dernier segment, le plus à l'ouest, le caractère cyclonique marqué du vent se traduit par un vent observé dont l'orientation au sud est d'autant plus prononcée qu'on se rapproche de la surface. Il en résulte une composante méridienne plus forte. L'innovation est alors uniformément négative (les observations ont une composante plus négative que l'ébauche) sur toute l'épaisseur de l'atmosphère.

Sur le second segment, le caractère cyclonique plus marqué des observations par rapport à l'ébauche a pour conséquence que les vecteurs des vents observés sont toujours positionnés à gauche des vecteurs de l'ébauche. En basse couche (fig. 5.21-d.) les forces mesurées sont très supérieures (facteur trois) à celles de l'ébauche. Ceci se traduit par une innovation toujours positive en vent méridien sur toute l'épaisseur d'atmosphère sondée. En terme de composante zonale, on génère une innovation positive en basse couche surtout pour la partie nord du segment.

Nous pouvons donc conclure que le caractère "étrange" de l'innovation de vent méridien est surtout dû au positionnement de ces observations vis-à-vis de la dépression elle-même. L'innovation de vent pour la composante méridienne présente en conséquence une uniformité de valeurs sur toute l'épaisseur de l'atmosphère. Il n'y a qu'à forte proximité du centre dépressionnaire qui ne semble pas être positionné de façon identique entre ébauche et réalité que la constance de ces innovations est mise en défaut (cf. en altitude après le second coude du vol).

### 5.6.4 Positionnement de la dépression *L44*

Afin de documenter la question du positionnement relatif de la dépression *L44* dans l'ébauche et dans la réalité observée, plaçons nous à nouveau dans l'espace du modèle afin d'avoir des valeurs de géopotentiel ailleurs qu'aux points de sondage. Nous allons utiliser l'analyse 4D-Var de la période FASTEX (Desroziers *et al.*, 2002) (cf. site web <http://www.cnrm.meteo.fr/dbfastex/>). Cette réanalyse a utilisé toutes les observations disponibles a posteriori dans une assimilation quadri-dimensionnelle. Cette réanalyse est la meilleure représentation de la réalité que l'on puisse générer avec les outils disponibles actuellement en prévision numérique. Nous l'utiliserons donc comme référence à laquelle comparer l'ébauche.

Les figures (5.25), (5.24) et (5.23) montrent en superposition, les champs de géopotentiel de l'ébauche d'une part et de géopotentiel de la réanalyse 4D-Var d'autre part, à 850 *hPa*, 500 *hPa* et 350 *hPa*, respectivement.

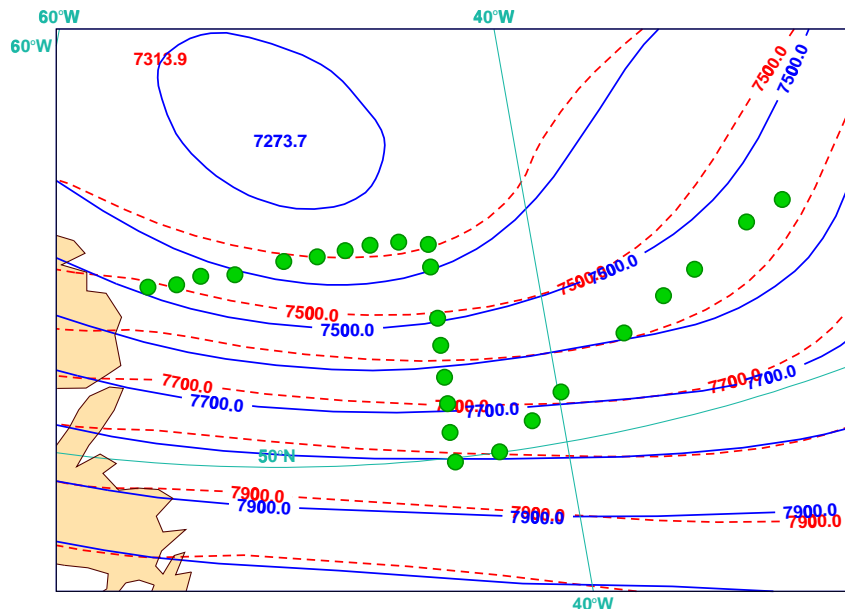


FIG. 5.23: Comparaison de la hauteur géopotentielle à 350 *hPa* de l'ébauche et de la réanalyse 4D-Var de la période FASTEX pour le 22 février 1997 à 12h TU. Les points représentent les positions des sondages. La réanalyse apparaît en traits pleins, l'ébauche est tracée en pointillé; isoligne : 100 m.

Il apparaît clairement qu'en basse couche (cf. figure 5.25), la dépression est placée plus au sud et est plus creusée dans la réanalyse. Ceci concorde avec les vents plus forts et plus tourbillonnants dans les observations des sondes. On retrouve l'inclinaison vers le nord des structures sensibles dans l'axe du système dont le centre se décale au nord-ouest avec l'altitude. Il en résulte qu'à 350 *hPa* (cf. figure 5.23), le flux est plus zonal au second coude et que le décalage entre les observations et l'ébauche semble moins fort.

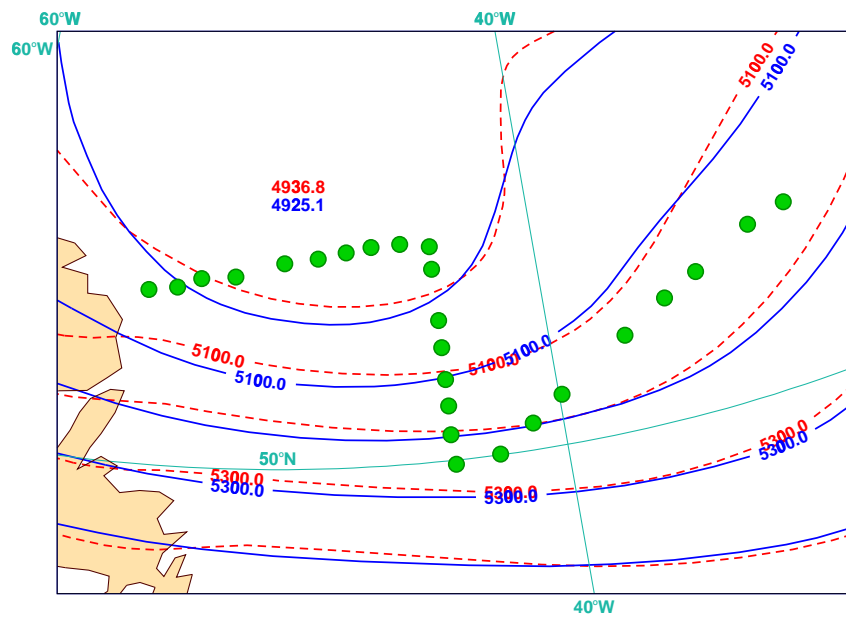


FIG. 5.24: Même représentation que sur la figure (5.23) pour la hauteur géopotentielle à 500 hPa; isoligne : 100 m.

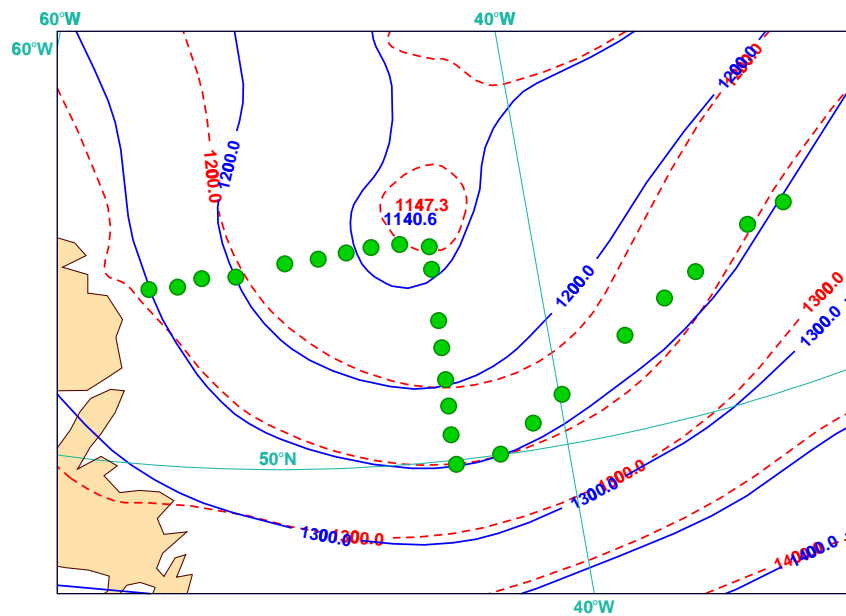


FIG. 5.25: Même représentation que sur la figure (5.23) pour la hauteur géopotentielle à 850 hPa; isoligne : 50 m.

### En guise de conclusion de l'étude sur la POI18

Pour conclure, on soulignera que le calcul de la sensibilité aux observations nous permet d'obtenir la fonction de contribution linéaire  $\mathcal{J}\mathcal{C}_t$  (cf. équation 5.4) à l'impact sur  $\mathcal{J}$ . Cette fonction se révèle très utile pour diagnostiquer l'emploi des observations ciblées par le système d'assimilation. On a ainsi pu mettre en évidence des déficiences du système d'assimilation que nous avons utilisé pour cette étude (système 3D-Var de 1998) et qui conduisent à une utilisation non optimale voire peu rationnelle des observations ciblées. Ces données particulières pourraient être utilisées d'une façon plus spécifique.

Ainsi, le calcul de la sensibilité aux observations (calcul nécessitant l'adjoint de l'opérateur d'assimilation qui a été développé pour cela) nous a permis de montrer que les observations ciblées pourraient être utilisées de façon plus optimale par l'algorithme d'assimilation. Par exemple, on peut s'interroger sur la justesse de la formulation de  $\mathbf{R}_t$  (cf. équation 2.51) pour les observations en basse couche: le 3D-Var utilise ici les mêmes variances d'erreur que pour des radiosondes classiques, alors que les conditions de prise de mesure sont loin d'être identiques.

La sensibilité aux observations indique aussi que des observations à sensibilité modérée peuvent contribuer de manière importante à la prévision, au travers des écarts avec l'ébauche. La prise en compte de la distribution statistique des erreurs de l'ébauche semble indispensable pour mieux déployer les observations ciblées. Ainsi une optimisation du ciblage au sens où tout le potentiel des observations ciblées puisse être utilisé apparaît comme une question complexe. Une approche de cette problématique fait l'objet du chapitre suivant.



## Chapitre 6

# Approche pronostique du ciblage Ciblage pronostique et sensibilité aux observations.

Dans les chapitres précédents, nous avons illustré l'utilisation de la sensibilité aux observations dans un cadre purement diagnostique où celle-ci est un outil permettant, soit une approche critique du ciblage selon les techniques utilisées durant la campagne FASTEX, soit un examen du système d'assimilation et de l'emploi des observations ciblées au sein de celui-ci.

On a ainsi mis en évidence que la structure des zones sensibles de la prévision subit une forte transformation dès lors que l'on prend en compte le système d'assimilation et les observations conventionnelles.

L'intérêt du ciblage réside avant tout dans l'utilisation en temps réel de ce concept afin d'améliorer une prévision à l'échelle locale. Il serait souhaitable de tirer parti de la sensibilité aux observations (ou l'adjoint de l'opérateur d'assimilation utilisé dans cette approche) pour définir le déploiement optimal des observations ciblées en prenant en compte la façon dont ces observations ciblées seront utilisées par le système d'assimilation, ainsi que le déploiement des autres observations.

En ce sens, un tel ciblage apparaîtrait plus optimal que celui effectué durant FASTEX. Mais ce caractère optimal se définit d'emblée par rapport à un algorithme d'assimilation et un aspect de la prévision décrit par la fonction  $\mathcal{J}$ .

Extrait de ce contexte précis, le terme *optimal* reste très général et sa signification dans le cas du ciblage n'est pas immédiate. Il convient donc de bien clarifier la notion de ciblage *optimal* ainsi que les limites théoriques et de mise en pratique d'un tel qualificatif. Nous serons ainsi amenés à préciser un certain nombre d'hypothèses et de conditions préalables pour pouvoir faire usage de la sensibilité aux observations dans un cadre pronostique. En conséquence, on pourra ainsi qualifier certaines approches de *sub-optimales*.

De telles stratégies sont présentées dans l'article de Bergot T. et Doerenbecher A. (Bergot et Doerenbecher, 2002) (partie 6.2 du présent chapitre).

## 6.1 Optimisation du ciblage

Le ciblage est une stratégie d'observation de l'atmosphère qui a pour finalité d'améliorer des prévisions locales, par déploiement d'observations supplémentaires dans des régions qui changent au jour le jour, en fonction de la situation météorologique. Ces observations sont conçues afin d'améliorer la description de l'état de l'atmosphère qui servira de conditions initiales à des prévisions de meilleure qualité. Le contexte naturel du ciblage est donc le temps réel, c'est-à-dire qu'il s'agit de déterminer à l'avance où placer ces observations supplémentaires pour avoir effectivement la possibilité de les déployer le moment venu.

Les techniques de ciblage utilisées pendant FASTEX ont été développées pour satisfaire un critère d'amélioration des prévisions. Ce critère peut être à caractère statistique comme dans le cas de l'*Ensemble Transform* : cette technique vise à réduire une mesure de la variance de l'erreur de la prévision estimée grâce à un ensemble de prévisions.

La technique adjointe utilisée pendant FASTEX se focalise sur la détermination des structures qui ont le potentiel d'impact le plus fort sur la prévision, afin d'éviter la croissance d'erreurs initiales. Dans la technique adjointe, une fois les zones sensibles, ou cibles, déterminées, la définition du déploiement des observations se fait par le tracé d'un plan de vol, sachant que le vecteur de mesure est un avion qui largue des dropsondes dont le nombre est limité. De plus, le tracé de ce plan de vol fait assez peu de cas de la présence et de la disposition des autres observations que l'on peut s'attendre à trouver dans les zones sensibles.

Ces approches de détermination des déploiements n'étaient pas optimales au sens où la nature des observations supplémentaires, leur nombre et leur mode d'assimilation ne rentraient pas en ligne de compte. Mais le caractère optimal d'un tel déploiement n'est pas aisé à déterminer ... En fait, ce concept se conçoit naturellement pour des critères qu'il reste donc à définir afin de clarifier la notion d'efficacité que l'on peut attendre du ciblage.

Le critère le plus naturel pour le ciblage est d'améliorer la prévision en moyenne. Ceci se traduit par une propriété sur la variance des erreurs de prévisions. On souhaite rendre la prévision sûre : cette variance doit diminuer par l'effet de l'addition des observations ciblées. Ce critère déjà extrêmement ardu à réaliser pour des systèmes tels que les modèles de prévision numérique, n'est pas suffisant pour cerner le caractère optimal d'un déploiement d'observation qui doit avoir une réalité : la réalisation de celui-ci impose forcément des contraintes supplémentaires de faisabilité et de coût.

Sous l'hypothèse d'un modèle parfait et d'un algorithme d'assimilation fixé, et d'une contrainte de coût minimum, l'optimisation du déploiement cherchera donc à garantir l'effet maximum sur la variance, d'un certain nombre de ces observations adaptatives tout en prenant en compte les observations conventionnelles qui leur seront contemporaines. La contrainte du coût réduit limite naturellement le nombre d'observations à utiliser. La connais-

sance a priori du réseau conventionnel doit se baser sur l'expérience de celui-ci. Pour les observations in situ, un certain nombre d'hypothèses nous permettent de simuler raisonnablement un réseau conventionnel. Pour les observations télédéteçtées, il est moins évident de simuler les données de vent dérivées du déplacement des nuages, par exemple les observations de type SATOB, ou pour des radiances dont l'exploitation est fonction de la nébulosité, rendant ainsi l'opérateur d'observation assez complexe et moins prévisible que dans le cas d'observations in situ.

Dans ce problème, l'inconnue est donc l'opérateur d'observation  $\mathbf{H}_t$ .  $\mathbf{H}_t$  comprend le nombre d'observations, leur nature, au travers des caractéristiques d'erreur de mesure et des paramètres mesurés ainsi que leur répartition spatiale. La détermination de cet opérateur, sous les contraintes imposées semble irréalisable en l'état actuel : en plus de difficultés conceptuelles rédhibitoires, les dimensions des systèmes tels que les modèles de prévision numérique du temps ne simplifient pas l'implémentation de telles solutions, si elles existent.

Il faut donc, pour aboutir à une mise en solution possible, se résoudre à une réduction drastique des degrés de liberté du problème. Cette réduction de la dimension passe par l'étude de systèmes théoriques dont les dimensions sont plus modestes (cf. partie 6.2 du présent chapitre, (Bergot et Doerenbecher, 2002)) ou par la définition d'un critère moins exigeant sur la prévision issue d'une expérience de ciblage et par l'introduction de nombreuses hypothèses supplémentaires sur la nature de l'opérateur d'observation. Ces hypothèses peuvent être rassemblées sous le terme de "stratégie de détermination" des déploiements, la partie 6.3 présente des résultats obtenus sur des cas FASTEX dans ce cadre *sub-optimal*.

## 6.2 Article de T. Bergot et A. Doerenbecher (2002)

Cette partie contient l'article (Bergot et Doerenbecher, 2002), à paraître dans la revue à comité de lecture *Quarterly Journal of Royal Meteorological Society*.

Cet article, intitulé "*A study of optimization of the deployment of targeted observations using adjoint-based methods*" présente les éléments théoriques basés sur les notions probabilistes nécessaires au cadre pronostique de cette étude : c'est la formulation du problème de l'optimisation pour lequel est décrite la méthode de *KFS* (*Kalman Filter Sensitivity*).

Dans un second temps, des résultats sont amenés dans un cadre unidimensionnel qui permet de bien illustrer les éléments théoriques détaillés auparavant.

Enfin, des résultats utilisant les données de FASTEX sur les POI17 et POI18 permettent d'illustrer l'utilisation dans un cadre pronostique contraint par des hypothèses fortes de la sensibilité aux observations et de l'adjoint de l'opérateur d'assimilation ( $\mathbf{K}^T$ ).



**A study on the optimization of the deployment of  
targeted observations using adjoint-based methods**

Thierry Bergot and Alex Doerenbecher

*Météo-France, Centre National de Recherches Météorologiques*

submitted to *Quart J. Roy. Meteor. Soc* - (June 2001)

revised - October 2001

*Corresponding address :*

*T. Bergot, Météo-France, CNRM/GMME, 42, avenue G. Coriolis, F-31057 Toulouse*

*cedex, France*

*Email : [Thierry.Bergot@meteo.fr](mailto:Thierry.Bergot@meteo.fr)*

# ABSTRACT

A new adjoint-based method to find the optimal deployment of targeted observations, called Kalman Filter Sensitivity (KFS), is introduced. The major advantage of this adjoint-based method is that it allows to directly compute the reduction of the forecast score error variance that would result from future deployment of targeted observations. This method is applied in a very simple 1D context, and is then compared to other adjoint-based products, such as classical gradients and gradients with respect to observations. The major conclusion is that the deployment of targeted observation is strongly constrained by the aspect ratio between the length-scale of the sensitivity area and the length-scale of the analysis error covariance matrix. This very simple example also clearly illustrates that the reduction of forecast error variance is stronger for assimilation schemes which have a smaller characteristic length-scale. Finally, the KFS technique is applied in a diagnostic way (i.e. once the observations are done) to four FASTEX cases. For these cases, the reduction of the forecast error variance is in agreement with the efficiency of targeted observations as previously studied. A preliminary step toward an operational use has been performed on FASTEX IOP18, and results seem to validate the KFS approach of targeting.

# 1. Introduction

The forecast of some meteorological events (like rapid cyclogenesis) remains a difficult problem, even at short range (typically 12h to 48h). These situations are often very problematic for the forecasters, and can moreover have a dramatic socio-economical impact. Even if the model can simulate the evolution of the atmosphere perfectly, errors in the initial conditions may amplify rapidly and degrade the forecasts. These errors in the initial conditions are a consequence either of the errors in the observations, or of the inhomogeneous observational network (area with insufficient or inaccurate observations), or of the assimilation scheme which transforms the observations into model initial conditions.

In order to try to improve the forecast of such events, a new observational strategy, called adaptive or targeted, has been proposed. The principle is to add an adaptive component to the conventional network of observations. Adaptive observations are intended to reduce the forecast error variance of a forecast with a high potential socio-economic impact. It is adaptive in the sense that the locations of these measurements vary from day to day. The problem is then to locate the targeted observations, in an optimal way (in the sense of lowest cost or minimum number of observations versus maximum of improvement of the forecast). The forecast errors, in a perfect model context, are a consequence either of errors in the initial conditions, or of initial error growth. During the past years, several solutions have been suggested to find the optimal locations of adaptive observations and thus to define targeting strategies, and these strategies have been tested during the FASTEX field experiment (Joly et al., 1999 ; Emanuel and Langland, 1998), the NORPEX field experiment (Langland et al., 1999) and the U.S. Winter Storm Reconnaissance program (Szunyogh et al., 2000).

The first method is based on an estimation of the uncertainty in the analyses and

on an estimation of the time evolution of this uncertainty with an ensemble of forecasts (Ensemble Transform technique, Bishop and Toth 1999). The main goal is to find the location of observations that will minimize a given norm of the forecast error variance inside a verifying area. This method combines both the statistical distribution of the errors and error growth (represented by the evolution of the ensemble of forecasts). However this technique does not take into account the fact that observations have to go through the data assimilation processes to produce initial conditions. Moreover, the efficiency of targeted observations strongly depends on the assimilation scheme (Morss 1999, Bergot 2001). A new method, called Ensemble Transform Kalman Filter (ETKF), has been recently proposed by Bishop et al. (2001), and has been used during the Winter Storm Reconnaissance Program 2000 and 2001. Majumdar et al. (2001) have tested the ability of the ETKF to quantitatively estimate the reduction in the forecast error variance with the NCEP operational forecast model.

The second method focuses on initial error growth and is based on adjoint products (Bergot et al. 1999, Gelaro et al. 1999, Langland et al. 1999, Palmer et al. 1998). This method relies on the fact that the initial errors in an unstable subspace of small dimension play a key role on the forecast errors. If small errors exist in these unstable directions, they will rapidly grow and degrade the forecast. The idea is then to concentrate observations inside the sensitive area, in order to minimize the initial error. To take the assimilation processes into account, the sensitivity to observations has been constructed (Baker and Daley 2000, Doerenbecher and Bergot 2001). However, these sensitivity fields do not indicate where initial errors are, they only suggest where observations may have a big effect on the forecast. These adjoint-based strategies include only little information about the probable location of the initial errors. Moreover some studies have shown that



it is important to take into account the statistical distribution of the errors, even if the dynamical processes prevail in the forecast error growth (Lorenz and Emmanuel 1998, Morss et al. 2000).

To take this fact into account, a new simple method, based on sensitivity, and called Kalman Filter Sensitivity (KFS), is proposed. One will also test in a simple context how this method can take into account the assimilation process, the expected quality of the analyzed field, and the way these uncertainties can be propagated by the atmospheric dynamics (sections 3 and 4). And finally, this method will be illustrated on FASTEX cases (section 5).

## 2. Formulation of the problem

The sensitivity of one aspect of the forecast to initial conditions has been the subject of many studies during the past years (Rabier et al. 1996, Errico 1997). The classical framework of these studies was to determine the variation of a forecast aspect  $J$  as a function of the modification of the initial conditions  $x_a(t_0)$ . However, the sensitivity fields do not indicate the likely location of initial errors, they only suggest where to look for initial conditions that may have a big effect on the forecast. The impact of observations on the forecast is the combination of the sensitivity and the initial errors, and the observations that give the maximum of impact are not necessarily located in the area with the highest sensitivities (Doerenbecher and Bergot, 2001). Since one cannot determine the amplitude of the initial error before the observations are done, and since analysis errors partly arise from unknown errors in the measurements, it seems natural to include the statistical distribution of the analysis errors in an operational targeting context. Berliner et al. (1999) have formulated the targeted observations problem in a

rigorous statistical framework. However, the proposed optimization is virtually intractable in very high-dimensional problems, such as an operational numerical weather forecast model. The goal of this section is to describe a simplified method, based on sensitivity fields, on statistical distribution of the errors, and on the assimilation scheme.

### *a* Estimation of the variance of a forecast score

In the adaptive observation problem, it is crucial to provide an estimate of the reduction of the forecast error variance due to the inclusion of targeted observations. An approach, in theoretical study, to evaluate this forecast error variance is to use a Kalman filter, and to try to minimize some components of these forecast error variances (for example, the sum of the forecast error variance at different points of interest). However, a key difficulty is that the computation of such a criterion is impossible in current numerical weather prediction model, and numerical simplification and/or dimension reduction have to be performed.

Let  $x_{true}(t)$  be the true state of the atmosphere at time  $t$ , and let  $x_a(t)$  be the state vector at time  $t$  issued from the assimilation process, and  $x_f(t)$  a forecast at time  $t$ . Let  $t_0$  be the initialization time and  $t_1$  be the final, or verification, time at which a forecast aspect  $J$  was computed. Let us define a forecast score  $S$ , depending on the forecast aspect  $J$ :

$$S = J(x_f(t_1)) - J(x_{true}(t_1)) \tag{1}$$

One proposes to compute the variance of the forecast score  $S$ . This variance gives us an estimate of the predictability of the forecast aspect  $J$  at time  $t_1$ , and is given by

$$(\sigma_S)^2 = \overline{(J(x_f(t_1)) - J(x_{true}(t_1)))^2} - \overline{J(x_f(t_1)) - J(x_{true}(t_1))}^2 \tag{2}$$

The first step is to evaluate the second term of equation (2) and therefore to calculate the

bias of the forecast score  $S$  at time  $t1$ . This bias is given by

$$\overline{S} = \overline{J(x_f(t1)) - J(x_{true}(t1))} \quad (3)$$

Following the first order expansion of the forecast aspect  $J$ , the bias is estimated under the linear hypothesis by

$$\overline{S} \simeq \overline{(dJ/dx(t1))^T \cdot (x_f(t1) - x_{true}(t1))} \quad (4)$$

If the forecast model  $\mathcal{M}$  is perfect, then  $x_{true}(t1) = \mathcal{M}x_{true}(t0)$ . Let  $M$  be the linear approximation or tangent linear model of the forecast model  $\mathcal{M}$ , and  $M^T$  the adjoint model. Then, the first order approximation of the bias of  $S$  is given by

$$\overline{S} \simeq \overline{(M^T dJ/dx(t1))^T \cdot (x_a(t0) - x_{true}(t0))} \quad (5)$$

Following the classical notations of sensitivity studies, one notes the sensitivity field  $\nabla_x J = M^T dJ/dx(t1)$ . The adjoint model is based on a trajectory, issued from a non-linear run. As long as the change to this trajectory evolves nearly linearly between  $t0$  and  $t1$ , the gradient field remains basically unchanged (Harrison, 1999 ; Baker, 2000). Consequently,  $M^T dJ/dx(t1)$  would not change substantially, and the assumption that  $\overline{M^T dJ/dx(t1)} = M^T dJ/dx(t1)$  seems reasonable. Under this hypothesis, the bias  $\overline{S}$  at time  $t1$  may be written in the form

$$\overline{S} \simeq (\nabla_x J)^T \cdot \overline{(x_a(t0) - x_{true}(t0))} \quad (6)$$

Given the fact that the analysis is a unbiased process,  $\overline{(x_a(t0) - x_{true}(t0))} = 0$ , and consequently the statistical distribution of  $S$  is non-biased :

$$\overline{S} = 0 \quad (7)$$

Given equation (7), the second term of the equation (2) is zero, and following the previous notations and hypotheses, the variance of  $S$  at time  $t1$  can be written in the form

$$(\sigma_S)^2 = \overline{[(\nabla_x J)^T \cdot (x_a(t0) - x_{true}(t0))]}^2 \quad (8)$$

This expression can be developed into

$$(\sigma_S)^2 = (\nabla_x J)^T \cdot \overline{(x_a(t0) - x_{true}(t0))(x_a(t0) - x_{true}(t0))^T} \cdot \nabla_x J \quad (9)$$

Using the mathematical definition of the analysis error covariance matrix  $A$ , the variance of the score at time  $t1$  may be written in the generalized form (see also the demonstrations done in Baker 2000 and Bishop 2001)

$$(\sigma_S)^2 = (\nabla_x J)^T \cdot A \cdot \nabla_x J \quad (10)$$

Given the statistical distribution of the initial error (due to errors in the background field and errors in the observations), and the dynamical properties of the atmosphere (represented by the sensitivity field), one can easily determine the variance of a score ( $S$ ) of one aspect of the forecast ( $J$ ) at verification time.

## *b*    **Minimization of the variance of a forecast score**

In adaptive observations, one generally considers the observational network to be composed of a routine or conventional network (noted by a subscript  $c$ ), and an adaptive or targeted component (noted by a subscript  $t$ ). Let  $A_c$  (respectively  $A_{c+t}$ ) be the analysis error covariance matrix, given by the assimilation of conventional observations (respectively conventional and targeted observations). Following equation (10), the variance of the score of the forecast at verification time  $t1$  for the combined conventional and adaptive observations is given by

$$(\sigma_S^{c+t})^2 = (\nabla_x J)^T \cdot A_{c+t} \cdot \nabla_x J \quad (11)$$

If the errors of the targeted observations are uncorrelated with errors in the conventional observations, the covariance matrix of analysis errors issued from the assimilation of both conventional and targeted network is given by

$$A_{c+t} = (B^{-1} + H_c^T R_c^{-1} H_c + H_t^T R_t^{-1} H_t)^{-1} \quad (12)$$

where  $B$  and  $R$  are the background error covariance matrix and the observation covariance matrix, respectively;  $H$  is the linear observation operator, which interpolates from model to the observation space; subscript  $c$  corresponds to conventional observations and subscript  $t$  to targeted observations (note that we suppose here that these matrix are accurately specified).

Using the Sherman-Morrison-Woodbury formula, one may rewrite  $A_{c+t}$  as a function of the statistical characteristic of both conventional and targeted observations:

$$A_{c+t} = A_c - A_c H_t^T (R_t + H_t A_c H_t^T)^{-1} H_t A_c \quad (13)$$

Substituting equation (13) in equation (11), one can decompose the variance of the score into two terms: the first one concerns the effect of the conventional network of observations, and the second term represents the effect of the targeted observations, given the conventional observations and the assimilation scheme

$$(\sigma_S^{c+t})^2 = (\nabla_x J)^T \cdot A_{c+t} \cdot \nabla_x J \quad (14)$$

$$= (\nabla_x J)^T \cdot [A_c - A_c H_t^T (R_t + H_t A_c H_t^T)^{-1} H_t A_c] \cdot \nabla_x J \quad (15)$$

$$= (\sigma_S^c)^2 - (\nabla_x J)^T \cdot A_c H_t^T (R_t + H_t A_c H_t^T)^{-1} H_t A_c \cdot \nabla_x J \quad (16)$$

Therefore, the reduction in the variance of the score, due to the inclusion of the targeted observations is given by

$$(\delta\sigma_S^t)^2 = (\nabla_x J)^T \cdot A_c H_t^T (R_t + H_t A_c H_t^T)^{-1} H_t A_c \cdot \nabla_x J \quad (17)$$

This expression allows to make a quantitative prediction of the reduction of the forecast error variance in the unstable direction of the sensitivity field, provided that the error covariances are accurately specified and that the errors evolve linearly. Inaccuracies in error covariances that are specified by the assimilation scheme can lead to errors in the estimations of the forecast score variance. However, this remark is valid for all studies which aim at estimating the forecast error variance (see also Majumdar et al., 2001). One hopes that substantial effort will be done in the next years to improve estimates of the background error covariances, and therefore to increase the relevance of this kind of studies. It should also be noted that equation (17) focuses on the variance of the forecast error in the direction given by the sensitivity. Therefore, as for studies based on sensitivity fields, one focuses on one given aspect of the forecast,  $J$ . The goal is to reduce the variance of the score given by this forecast aspect. This kind of approach is in agreement with the targeted observation concept : when a meteorological event with a possible high socio-economic impact is forecasted, the forecaster defines the forecast aspect associated with this socio-economic impact (strong wind, rainfall, ...) and equation (17) gives the location of adaptive observations that allow to reduce the variance of the error on the selected forecast aspect.

To optimize the location of targeted observations (in a statistical sense), it is necessary to obtain a maximum decrease of the variance of the forecast score. The problem is to find  $H_t$ , given the statistical characteristics of the conventional network, that maximizes equation (17). This is a matricial optimization problem, which involves complicated mathematical techniques (so called linear optimization design, Fedorov et al. 1972), such as the Simplex method, to be solved in an optimal way. Note that this problem can be solved before any observations are performed, since only the statistical characteristics

of the observations and of the background field are needed. Although the location of some conventional observations (such as the cloud track wind vectors, for example) are difficult to predict accurately, one assumes for the sake of simplicity that the state of the conventional observations is exactly known.

The first difficulty lies in the estimation of the analysis error covariance matrix  $A_c$ . Most of the current assimilation schemes use the variational method in which the analysis state is defined as a minimum of a cost function. This means that the analysis error covariance matrix is not computed during the minimization. However, several methods exist for getting an estimate of it (Fisher and Courtier 1995). It should be noted that equation (17) depends on the covariance error matrices  $A_c$  and  $R_t$ . If these matrices are inaccurately specified, the optimal location of targeted data could be inaccurate as well. It seems particularly essential to get a precise estimate of  $A_c$  in the direction of the sensitivity  $\nabla_x J$ . Following the work of Fisher and Courtier (1995), Doerenbecher and Bergot (2001) showed how it is possible with the Lanczos algorithm to obtain an accurate estimate of  $A_c$  in the unstable direction of the sensitivity, in an operational assimilation context.

The second difficulty for the computation of equation (17) lies in the estimation of the inverse of the so-called "innovation of targeted covariance matrix"  $R_t + H_t A_c H_t^T$ . The size of this matrix is the number of the targeted observations,  $Nt$ . For currently operational targeted applications (such as the definition of an optimal flight plan),  $Nt \ll 1000$ , and this matrix could be directly inverted. Another possibility to practically solve the problem, is to find the optimal location of the targeted observations in a sequential manner, as explained in Bishop et al. (2001). In this case, one wants to find a sub-optimal solution of the problem by first identifying the best location of a single targeted observation. Once

this location has been found, one can find the location of the second targeted observation, taking into account the effect of the previous targeted observation. This sequential method is very efficient to simplify the problem, however it is only a sub-optimal method, in opposition to the solution given by the global optimization of equation (17). In the case of such method, the size of the innovation covariance matrix is reduced to the size of one targeted observation, which makes its inversion even easier.

The proposed method given by equation (17) can be seen as a simplified evaluation of the reduction of the forecast error covariance in the direction of the sensitivity field. Following equation (10), and the fact that  $\nabla_x J = M^T dJ/dx(t1)$ , the variance of the forecast score  $S$  is given by

$$(\sigma_S)^2 = (M^T dJ/dx(t1))^T \cdot A \cdot (M^T dJ/dx(t1)) \quad (18)$$

$$= (dJ/dx(t1))^T M A M^T dJ/dx(t1) \quad (19)$$

The evolution of the forecast error statistic ( $P$ ) in a perfect model context is given by the Kalman filter theory:

$$P = M A M^T \quad (20)$$

The comparison of equation (19) and equation (20) clearly shows that the variance of  $S$  is the projection of the forecast error covariance on the direction of the gradient field at time  $t1$ .

The reduction of the forecast error variance implied by equation (20) due to the inclusion of targeted data to the conventional network of observations can also be estimated following equation (13):

$$P_c - P_{c+t} = M A_c H_t^T (R_t + H_t A_c H_t^T)^{-1} H_t A_c M^T \quad (21)$$

In the same manner, one easily remarks that the reduction of the variance of the score



given by equation (17) is just an estimation of the reduction of the total forecast error variance in the direction of the sensitivity. In this sense, the proposed method will be called "Kalman Filter Sensitivity" (KFS).

### 3. Single targeted observation case

#### *a* Mathematical simplification

As previously discussed, the optimal location of targeted observations could be resolved by a sequential assimilation of single targeted observation. In this case, the optimal location of targeted data could be simplified into the search of the optimal location of a single targeted observation. The goal of this section is to provide physical interpretations of the proposed optimal sampling strategy.

Suppose that a single targeted observation is to be performed, and that this observation will measure a single element of the state vector  $x_a(t_0)$ . Then,  $H_t$  is a single row vector whose elements are all zero except for one element equal to 1. In a grid point model, the single observation is located at a grid point and the location of the "1" element in  $H_t$  corresponds to the location of this observation; let us note  $i$  this location. In this case, the targeted observation error covariance matrix,  $R_t$ , is reduced to a scalar,  $\sigma_o^2$ . Let the conventional analysis covariance matrix be noted  $A_c = [a_{j,k}]$ , and the sensitivity field be noted  $\nabla_x J = [g_k]$ . For a single observation at point  $i$ , equation (17) reduces to

$$(\delta\sigma_S^i)^2 = \left(\sum_k a_{i,k}g_k\right)^2 / (\sigma_o^2 + a_{i,i}) \quad (22)$$

The proposed optimal sampling problem is to find  $i$  that maximizes this expression. With some approximations, this equation provides some clues. The numerator corresponds to the product of the matrix of conventional analysis covariances with the gradient field

$A_c \cdot \nabla_x J$ , projected at the targeted observation point  $i$ . This expression is weighted by the sum of the variance of the conventional analysis at the targeted observation point and the targeted observation variance error. Suppose that the targeted observation is of good quality (i.e.  $\sigma_o^2 \ll a_{i,i}$ ). If the characteristic length-scales of the covariance analysis error matrix is smaller than the characteristic length-scales of the sensitivity field (i.e. if  $A_c$  is almost diagonal in the sensitive area), equation (22) can be simplified into  $(\delta\sigma_S^i)^2 = a_{i,i}g_i^2$ . The optimal location of the targeted data (in the sense of a maximum reduction of the variance of the forecast score) is therefore the region of maximum sensitivity weighted by the variance of the conventional analysis error at this point. If  $A_c$  is almost diagonal, and if the diagonal terms are almost uniform over the sensitive area, the optimal sampling is mostly constrained by the dynamics (reflected by the sensitivity field). In this case, the optimal targeted observation is located where the absolute value of sensitivity is maximum. Alternatively, if the sensitivity field varies little with respect to the length-scale of the conventional analysis covariances, the sampling strategy is dominated by the statistical characteristics of the conventional analysis errors, and the optimal targeted observation is located where the variance of the conventional analysis error is maximum. Of course in real situations, the optimal sampling strategy combines both the dynamics and the analysis errors.

## *b* Comparison with sensitivity to observations

Another way to optimize the location of targeted observations is to use the so-called sensitivity to observations. Baker and Daley (2000) and Doerenbecher and Bergot (2001) suggested that the sensitivity with respect to observations could be an efficient tool for defining the location of targeted observations. One of the major advantages is that the

sensitivity to observations is significantly reduced in regions already sampled by existing observations. Another advantage is that this kind of sensitivity takes into account the way in which the observations will be assimilated. With the previous notations, the sensitivity to targeted observations,  $y_t$  is given by

$$\nabla_{y_t} J = R_t^{-1} H_t A_{c+t} \cdot \nabla_x J \quad (23)$$

The covariance analysis error matrix  $A_{c+t}$  can be determined using equation (13). For a single targeted observation at point  $i$ , this matrix reduces to

$$A_{c+t} = [a_{j,k} - a_{i,j} a_{i,k} / (\sigma_o^2 + a_{i,i})]_{j,k} \quad (24)$$

And the sensitivity to the targeted observation at point  $i$  is expressed by

$$\nabla_{y_t} J(i) = \sum_k a_{i,k} g_k / (\sigma_o^2 + a_{i,i}) \quad (25)$$

If  $a_{i,i}$  is almost uniform over the sensitive area (i.e. if the length scale of the variance of  $A_c$  in the sensitive area is long compared to the length scale of the sensitivity field), the two methods (Kalman Filter Sensitivity and sensitivity to observations) lead to the same optimal location of the targeted observation. This optimal location is also given by the maximum of  $A_c \cdot \nabla_x J$ . The optimal location is the place where the sensitivity, weighted by the analysis error covariance matrix, is maximum. This case can arise, for example, if the diagonal term in  $B$  is almost constant inside the sensitive area and if the conventional data are only available far away from the latter.

Alternatively, if  $a_{i,i}$  strongly varies in the sensitive area, for example if the sensitive area is located close to a well observed area, the two methods can give significantly different optimal locations. To illustrate this point, let us decompose the elements of the covariance error matrix  $A_c$  into:  $a_{i,k} = \sigma_a(i) \sigma_a(k) \rho(i,k)$ . The first two terms  $\sigma_a(i)$  and  $\sigma_a(k)$  represent the standard deviation of the analysis errors at point  $i$  and  $k$  respectively,

and the third term represents the normalized correlation between these two points. Let us also note  $I(i) = \sum_k \varrho_{i,k} g_k$ . This term can be seen as the product of the sensitivity field by the structure functions associated to the assimilation processes. Using these notations, the sensitivity to observations (equation 25) is given by

$$\nabla_{yt} J(i) = \sigma_a^2(i) I(i) / (\sigma_o^2 + \sigma_a^2(i)) \quad (26)$$

And the KFS method (equation 22) can be written in the form

$$(\delta\sigma_S^i)^2 = \sigma_a^4(i) I^2(i) / (\sigma_o^2 + \sigma_a^2(i)) \quad (27)$$

It can be easily seen that  $(\delta\sigma_S^i)^2 = (\sigma_a^2(i) + \sigma_o^2) [\nabla_{yt} J(i)]^2$ . In this sense, the KFS method takes into account the way the targeted observations will modify the initial conditions through the assimilation process, and the way these modifications could be propagated by the model. Moreover, it takes into account the quality of the conventional analyzed field. It would be useful to recall here that equations (26) and (27), and therefore this discussion, apply to a single observation only.

## 4. Application in a simple 1D framework

### *a* Simple 1D analysis framework

In order to better understand the optimal sampling problem, a very simple 1D univariate analysis system, quite similar to the one used by Baker and Daley (2000) has been constructed. Since this framework is very simple, the application of the following results to real cases may exhibit certain limitations. However, it can be beneficial to better understand the advantages of the KFS method.

The 1D domain contains  $N = 100$  points, which are uniformly distributed over a mesh with a spacing  $\Delta x$ . One wants to find the optimal location of a single targeted observation

( $N_t = 1$ ), that measures the same quantity as the analysis variable. One assumes that the sensitivity field  $\nabla_x J$  has already been calculated, and this sensitivity field is simulated here using simple trigonometric functions. The sensitivity at point  $x_k$  is assumed to follow

$$g(x_k) = \beta_g \cos(2\pi(x_k - x_g)/\lambda_g) \exp(-|x_k - x_g|/L_g) \quad (28)$$

where  $x_g$  is the location of the maximum sensitivity,  $L_g$  is the characteristic length scale of the sensitive area,  $\lambda_g$  is the frequency of oscillation of the gradient field inside the sensitive area, and  $\beta_g$  is a constant amplitude factor. In the following experiment, the maximum amplitude of the gradient field is located in the middle of the domain ( $X_g = 50\Delta x$ ), and the frequency of oscillation of the gradient field is taken  $\lambda_g = 3/2L_g$ . With this value of  $\lambda_g$ , the sensitivity field looks as in reality. Different tests have shown that the results presented hereafter are not affected by small changes of  $\lambda_g$  around this value. The gradient field tends towards zero over most of the domain, and is non-zero inside a limited area (called sensitive area) of characteristic length-scale  $L_g$  (see figure 1b). One can remark that this framework is significantly different from the 1D study of Baker and Daley (2001), in the sense that only a fraction of the domain is sensitive to initial conditions. One can also notice that this gradient field is symmetric with respect to  $X_g$ .

The background error covariance  $B$  is a  $N \times N$  matrix where element  $b_{j,k}$  is given by a second order autoregressive function:

$$b_{j,k} = \sigma_b^2(1 + d(j,k)/L_b) \exp(-d(j,k)/L_b) \quad (29)$$

where  $L_b$  is the correlation length for the background error.  $d(j,k)$  is the distance between points  $x_j$  and  $x_k$ , and is given, in this simple case, by  $d(j,k) = |j - k|\Delta x$ .  $\sigma_b^2$  is the background error variance, and can be seen as a scaling factor. It is important to note that this formulation of  $B$  assumes quasi-isotropic error correlations in the guess field.

Therefore, the simple framework studied here is typical of a 3D-Var assimilation scheme. It should be noted that some of the conclusions might change if the data assimilation assumed flow dependent error covariances, as for 4D-Var.

### *b* Case with constant analysis variance error

The first simple targeting situation is the case where the variance of the conventional observations analysis error matrix is homogeneous (i.e. the diagonal term of matrix  $A_c$  is homogeneous). This case can arise if there are no conventional observations inside, or close to, the sensitive area. In this case, the conventional analysis error covariance matrix is equal to the background error covariance matrix,  $A_c = B$  inside the sensitive area. Following the simple 1D framework previously described, the variance term  $\sigma_a^2$  (i.e. the diagonal term of matrix  $A_c$ ) is therefore constant and equal to  $\sigma_b^2$ . One assumes in this subsection that the conventional analysis covariance is similar to equation (29). The accuracy of the measurement is set equal to  $\sigma_o^2 = \sigma_b^2/16$ .

As previously demonstrated under these hypotheses, the sensitivity to observations and the KFS method give the same optimal location of a single targeted observation (the maximum amplitude of  $A_c \cdot \nabla_x J$ ). However, even in this very simple case, the optimal adaptive observation is not necessarily located where the sensitivity with respect to analysis,  $\nabla_x J$ , is maximum, and it would be helpful to learn more about how data assimilation schemes, and how instabilities in the model dynamics, will interact (as previously shown by Baker and Daley 2000).  $\delta\sigma_S^2$  (and also  $\nabla_y J$ ) depends on two length scales: the gradient length scale  $L_g$ , and the conventional analysis correlation length scale  $L_b$ .

When the characteristic length scale of the conventional analysis error correlation, is much smaller than the characteristic length scale of the sensitivity,  $L_b \ll L_g$ , equation

(22) may be approximated by  $(\delta\sigma_S^i)^2 = g(x_i)^2\sigma_a^4/(\sigma_a^2 + \sigma_o^2)$ . Then, the optimal single targeted observation is located at the maximum of the absolute value of sensitivity with respect to analysis. An example of such scenario is given in figure 1, for an aspect ratio  $L_b/L_g = 0.1$ . In such a case, all the useful information is contained in the dynamical instability, and therefore in the classical gradient field with respect to initial conditions.

If the characteristic length scale of the gradient and of the conventional analysis error correlation is roughly similar, interactions between the observations, the data assimilation system and the forecast model become more complex. Such an example is given in figure 2, for an aspect ratio  $L_b/L_g = 0.4$ . One can remark that the optimal targeted observation is not located at the extremum of the gradient field. Moreover, an observation located at the maximum of the gradient (point 50) leads to a reduction of the forecast variance of about 1/3 of the reduction due to the optimal observation. In such case, all information present in both the gradient field and the conventional analysis error correlation is important, and should be taken into account to find the optimal location of the targeted observation. It can be noticed that this result implies that a single targeted observation located in a region where the sensitivity is strong, but changes sign rapidly, (with respect to the conventional analysis error length-scale), leads to a very small impact on the forecast score. Conversely, a single targeted observation located in a region where the sensitivity is relatively small, but with few changes of sign, leads to relatively large decrease of the forecast score variance.

If  $L_b/L_g = 2$ , it can be seen in figure 3 that any observation located inside the sensitive area has about the same impact, in terms of the reduction of the score variance (or in terms of sensitivity to observations). This behavior can be explained by the wide influence of the observation: any observation located inside the sensitive area will modify the initial

conditions in the same way. One can also note that the effect of the targeted observation is reduced by a factor of 1/2 for sensitivity to observation (figures 1c and 3c) and for the reduction of variance (figures 1d and 3d). This proves that the efficiency of targeted observations also depends on the characteristics of the assimilation scheme, as previously demonstrated by Baker and Daley (2000), Bergot (2001) and Doerenbecher and Bergot (2001). This kind of experiments also allows to discuss the effects of wrong background error covariance assumptions on the estimation of the reduction of the forecast score variance. For example, one clearly sees that the effect of assuming a larger scale in background error covariance, would lead to an *underestimation* of the reduction of the forecast error variance (comparison of figures 1d and 3d) with the KFS method.

As previously explained, in the case of a single targeted observation and uniform  $\sigma_a^2$ , the optimal location is given by the maximum of  $A_c \cdot \nabla_x J$ . In figure 4,  $(A_c \cdot \nabla_x J)^2$  is plotted as a function of both the aspect ratio  $L_b/L_g$  and the location of the observation  $x_i$ . This figure allows to easily find the optimal location for different aspect ratios. The behavior of this efficiency is relatively complex. However, it is noteworthy that the area near the maximum of the gradient can correspond to a minimum in the efficiency for many aspect ratios. Even in this very simple case, not only the sensitivity field is important, but also the characteristic length-scale of the covariance errors should be taken into account to find the optimal location of targeted observations.

In the simple case studied, the optimal location of the targeted observations does not depend on the accuracy of the measurement,  $\sigma_o^2$ . However, the estimation of the forecast error variance depends on  $\sigma_o^2$ . Figure 5 displays the variation of variance reduction,  $\delta\sigma_S^i$ , at the optimal location as a function of  $\sigma_o^2$ , for the three aspect ratios that were previously studied. Following Equation (27), the shape of the curves follows a function of the type



$\alpha/(1 + X)$  where  $\alpha = \sigma_a^2 I^2(i)$  and  $X = \sigma_o^2/\sigma_a^2$ . The maximum reduction of the variance is  $\alpha$  and is obtained for very accurate measurements. This limit depends on the aspect ratio  $L_b/L_g$  : the smaller the length scale of the error correlation function assumed by the data assimilation scheme is, the most efficient targeted observation is. This illustrates that the reduction of forecast error variance would be higher when the length-scale of the correlations assumed in  $B$  are smaller.

### *c*    **Simulation of a coastline**

In this subsection, we simulate a situation in which the target region is located close to a coastline. This case frequently occurred during FASTEX, and it was then difficult to define a flight plan since the influence of conventional observations on the sampling of the sensitivity area was unknown. One assumes here that there is a conventional observation every 5th grid point over the so-called "land" while there are no conventional observations over the so-called "ocean". This distribution is consistent with the classical distribution of RAOBS over North America and the North Atlantic Ocean. The background term  $B$  is expressed as in equation (29). As previously done, three different aspect ratio  $L_b/L_g$  equal 2, 0.4 and 0.1 are studied. The accuracy of both conventional and targeted observations are equal to  $\sigma_o^2 = \sigma_b^2/16$ , as in previous subsection. The location of targeted observations are tested over land and ocean, indiscriminately.

Figure 6 shows the case where  $L_b/L_g=0.1$ . In such a case, the three methods (sensitivity with respect to initial condition, sensitivity with respect to targeted observation, and the simplified Kalman filter sensitivity), give the same location for the optimal single targeted observation. This optimal targeted observation is located where the sensitivity with respect to initial conditions is maximum.

If the characteristic length scale of the gradient and of the conventional analysis error correlation are roughly similar, the three methods give relatively different results (figure 7). As noted by Baker and Daley (2000), one observes a phenomena of super-sensitivity to observation at the border between ocean and land. A comparison of fig2c and fig7c, shows that the sensitivity with respect to observation is multiplied by a factor 2 near the coastline, and the optimal targeted observation from the sensitivity to observation method, is clearly located at the coastline, as previously shown by Baker and Daley (2000). The KFS method gives significantly different results, consistent with the explanation given in section 3b. In fact, this method also takes into account the structure and amplitude of the errors in the conventional analysis fields, and consequently the optimal targeted observation is clearly located over the ocean. One can remark an increase in the maximum reduction of the forecast error variance (fig2d and fig7d). This phenomenon can be seen as a super-sensitivity, as previously. This is a consequence of the conventional data located at the border of the sensitive area.

And finally, if  $L_b/L_g=2$ , it can be seen in figure 8 that the three methods also lead to different results. However, the three optimal locations are closer than in the previous case (3 points between the sensitivity to observation and the KFS). Another important remark is that, in such case, the reduction of the variance of the forecast score is about 8 times as small as in the homogeneous case (fig3d and fig8d). A reduction is also observed for the sensitivity to observations, but with a factor  $3/2$ .

In conclusion, one can remark that the aspect ratio  $L_b/L_g$ , and thus the optimal sampling, depends on numerous parameters. In fact, the length-scale  $L_b$  varies as a function of the measured parameters, the vertical level, and the geographical and meteorological situations. The length-scale  $L_g$  also varies as a function of the model parameters, model

levels, meteorological situations and forecast aspect  $J$ . Consequently, it is not trivial to define an universal aspect ratio  $L_b/L_g$  valid for real numerical weather forecast model. The results presented here certainly depend on the behavior of the gradient field, and the simple framework used here may limit their validity in the context of a real numerical weather forecast model. However, these findings illustrate very well the non-trivial nature of optimal sampling in a sensitive area. Moreover, since forecast errors grow non-linearly and since error covariances in the operational assimilation scheme are not accurately specified, the KFS method could lead to errors in the definition of the optimal sampling. While these results in a simple context seem encouraging, it is necessary to evaluate the robustness of the KFS method in operational NWP context.

## 5. Application in an operational context

### *a* context

The previous sections have focused on applications of the KFS method in a simplified context. In the future, it is envisioned that this method will be used in an operational context to examine different sampling strategies. For example, we hope to use this method during the future THORPEX experiment (The Hemispheric Observing Research Program Experiment, see [http://www.nrlmry.navy.mil/~langland/THORPEX\\_document/THORPEX\\_plan.pdf](http://www.nrlmry.navy.mil/~langland/THORPEX_document/THORPEX_plan.pdf) for details). However, the KFS results might also be used in a diagnostic way (once the observations are performed) in order to understand results obtained during previous field experiments, such as FASTEX (Fronts and Atlantic Storm Track Experiment, Jan-Feb 1997, see <http://www.cnrm.meteo.fr/fastex/>). This is the main goal of this section.

One focuses here on four FASTEX flights for which soundings collected by the Gulf-

stream IV are available (see Bergot, 2001 for more details): IOP15, IOP17 (2 flights) and IOP18. These flights have been studied in details by different teams (see Langland et al., 1999 ; Gelaro et al., 1999 ; Cammas et al., 1999 or Bergot 1999, for example).

The model used is the French Arpege/IFS operational model, developed in collaboration with the European Center for Medium range Weather Forecast (Courtier et al., 1991). The assimilation scheme is an incremental 3D-Var, and the covariance analysis error matrix is estimated following the work by Fisher and Courtier (1995) and Doerenbecher and Bergot (2001). The conventional observations used in this application are similar to those used for studying the efficiency of FASTEX targeted observations (Bergot 1999 and 2001). The forecast aspect  $J$  is the enstrophy, integrated vertically around 850hPa, over the horizontal verification area (35N-65N/30W-0W). This score is the same as the one used during the FASTEX field experiment.

## *b* validation in diagnostic mode

A previous study has enabled us to estimate the improvement of the forecasts, resulting from the inclusion of targeted data, in a systematic way (Bergot, 2001). A summary of the improvement of the forecasted kinetic energy for the four cases studied is given in table 1, see Bergot (2001) for more details. One clearly sees that two flights strongly improve the forecast: the first flight for IOP17 and the flight for IOP18. For the four flights studied, the data assimilation scheme's estimate of the variance of the forecast error has been computed for different scenarios (figure 9): without data,  $(\nabla_x J)^T \cdot B \cdot \nabla_x J$ ; with conventional data only,  $(\nabla_x J)^T \cdot A_c \cdot \nabla_x J$ ; with targeted data only,  $(\nabla_x J)^T \cdot A_t \cdot \nabla_x J$ ; and with targeted data added to conventional ones,  $(\nabla_x J)^T \cdot A_{c+t} \cdot \nabla_x J$ .

One case (IOP15, 15 Feb 1997) corresponds to a very small variance of the forecast

error in the direction of the sensitivity, even without data (variance about 36 times as small as for the first flight for IOP17). The inclusion of the conventional data further decreases this variance. Even without targeted data, the forecast for this IOP15 exhibits a strong confidence. The KFS method applied to these data gives the smallest reduction of the variance of forecast score and implies that this flight is inefficient. This result is in agreement with the result from the systematic study of the influence of FASTEX targeted data.

The second flight for IOP17 (18 Feb 1997) has a stronger variance of the forecast score issued from the background field. However, the inclusion of the conventional data strongly decreases this variance (by about 80%), and the effect of the targeted data, given the conventional network of observations, is relatively weak. Again, this flight is relatively inefficient, and this result is in agreement with table 1.

The first flight for IOP17 (17 Feb 1997) is noteworthy in the sense that the error variance of the forecast issued from the background field is the highest of the four studied cases. However, as for the second flight for this IOP (18 Feb 1997), the conventional data strongly reduce this variance (by about 74%). The positive effect of the targeted data added to conventional ones on the variance of the score clearly appears, and represents a reduction of about 31% of the variance of the forecast issued from the analysis based on conventional observations only.

However, the more interesting case is IOP18 (22 Feb 1997). For this case, the effect of the targeted observations on the variance of the score is higher than the effect of the conventional ones, even though only 25 dropsondes are available. The inclusion of the targeted observations leads to a reduction of the forecast score variance by about 42%. Other studies performed with different assimilation schemes and models (Langland et al,

1999, Bergot 2001) have previously demonstrated that this case is a success from the targeting point of view. The KFS result is in agreement with these studies.

### *c* toward an application in a prognostic mode

In order to understand the optimal deployment of observations given by KFS, figures 10 a and b plot the classical sensitivity field and the product  $A_c \cdot \nabla_x J$ , respectively, for FASTEX IOP18. As previously mentioned, the targeted observations performed during this case are very efficient. The product  $A_c \cdot \nabla_x J$  corresponds to the first term of the KFS method (equation 17). As previously explained, if the length-scale of the analysis error covariance matrix is large with respect to the length-scale of the sensitivity field (at least over the ocean), the KFS method can be summarized by this product. First, one remarks that the sensitive area defined with  $A_c \cdot \nabla_x J$  (figure 10b) extends further horizontally than the sensitive area defined with the classical sensitivity field (figure 10a). The second remark concerns the vertical structure of the sensitive area. Figure 11a shows a vertical cross-section of the classical sensitive area, and one can remark the typical very pronounced vertical tilt. Figure 11b plots the same cross-section for  $A_c \cdot \nabla_x J$ . One clearly notices a more barotropic structure, with only a smaller vertical tilt. However, the maximum of sensitivity is located at the lower levels for both sensitive areas (around model level 22, i.e. about 750hPa). These results are robust for the four studied cases, and are undoubtedly a consequence of the assimilation scheme used (3D-Var for this study).

The results of the previous section suggest that the KFS method can discriminate the cases where adaptive observations are needed and are efficient. However, this method must also be useful to make a choice between different possible deployment of observations. To illustrate this point, the flight for IOP18 has been decomposed into two

deployments : in the first one, only temperature measurements from dropsondes are taken into account (experiment called "temp"), and in the second one assumes that only wind measurements have been performed (experiment called "wind"). Figure 12 shows the reduction of the forecast error variance given by KFS,  $(\delta\sigma_S^t)^2$ , and the forecast error  $|S| = |J(X) - J(X_{true})|$ , where  $X_{true}$  is given by the analyzed value. One remarks that the "wind" deployment of observations leads to a significant stronger reduction of forecast error variance than the "temp" one (figure 12a). Associated to this decrease of the forecast error variance, figure 12b shows a significant decrease of the forecast error for the "wind" experiment. For this particular case, the efficiency of targeted observations is clearly a consequence of the wind measurements, and this result is in agreement with the result given by the KFS method. This preliminary result allows us to be optimistic. However, it will be necessary to validate the KFS method for numerous cases.

## 6. Conclusion

A new technique, called Kalman Filter Sensitivity (KFS), has been proposed for identifying the optimal deployment of an adaptive observation network. The KFS method allows the quantification of how targeted observations would reduce the variance of a given forecast score (such as enstrophy or kinetic energy, inside verifying area for example). This estimation is consistent with the statistics used during the assimilation, and with the dynamics of the atmosphere, given by a classical sensitivity field.

A very simple application of this technique in a 1D problem has been performed. This framework allows to simulate 3D-Var assimilation scheme. These preliminary results show that the sampling of a sensitive area is strongly constrained by the aspect ratio between the length-scale of the sensitivity area and of the conventional analysis error covariance

matrix. If the sensitivity varies little with respect to conventional analysis covariance, all the useful information is summarized by the classical gradient field. In other cases, it is not trivial to find the optimal location of targeted observations, and the assimilation scheme, the sensitivity field and the analysis covariance errors associated with conventional observations, should be all taken into account. For example, an observation located in a region where the sensitivity is strong, but changes sign rapidly, leads to a very small reduction of the forecast error variance of the chosen forecast aspect. In this case, the more efficient observations can be located at the border of the sensitivity field or near a coastline (region of super-sensitivity as previously mentioned by Baker and Daley, 2000). This work also clearly demonstrates that the sampling of the sensitive area strongly depends on the analysis errors covariance. A definition of an optimal deployment of targeted observations (in the sense of a minimum number of observations for a maximum improvement of the forecast) should therefore include the characteristics of the statistics of these errors.

An advantage of the KFS method compared to other adjoint-based targeting techniques is that it provides an explicit technique for computing the reduction of the variance of the forecast of a given score as a function of different deployments of observations. This is only strictly true if the observation and background error covariance are accurately specified, and if the errors evolve linearly. In order to test the validity of this computation, the KFS technique has been employed in a diagnostic way on four FASTEX cases. For the four studied cases, the reduction of the variance of the forecast score given by the KFS method is in agreement with the systematic survey of the efficiency of FASTEX flights (Bergot, 2001). In the two cases of small improvement of the forecast (IOP15 and second flight for IOP17), the KFS technique indicates a small reduction of the forecast error variance. In opposition, in the two cases of strong improvement of the forecast



(first flight for IOP17 and IOP18), the KFS method suggests a strong reduction of the forecast error variance. The IOP18 is noteworthy in the sense that the reduction of the forecast error variance due to the targeted observations alone (25 dropsondes, without conventional observations) is stronger than the reduction of the forecast error variance due to conventional observations. For this IOP18, two complementary deployments of targeted observations have been studied : the first one only contains temperature measurements, and the second one only contains wind measurements. For this cases, the wind measurements are the most efficient in the sense of the forecast score imposed (entropy). The KFS method is in total agreement with this result : the assimilation of wind measurements will lead to a stronger reduction of forecast variance.

These results seem to validate the KFS approach for targeting purposes. An important question is now to study the use of this tools in a prognostic mode (before the conventional and targeted observations are done), in order to try to optimize a network of targeted observations. What will be the most efficient deployment of targeted observations, given the conventional network of observations, the assimilation scheme and the actual instabilities of the atmosphere? To answer at this kind of question, it is now necessary to test the KFS method for numerous cases. This can be achieved for example in numerical simulations, such as OSSE, and during field experiments, such as the future THORPEX experiment. This kind of experiment will allow to evaluate the assets and weaknesses of the KFS.

### *Acknowledgments*

We are particularly grateful to Philippe Lopez, Gérald Desroziers and Florence Rabier for helpful comments on the first version of this article. The authors also address special thanks to Mike Fisher for his friendly help concerning the estimation of the analysis

error covariance matrix. Our colleagues from the CNRM/GMME team are also strongly acknowledged for their daily scientific and technical support. And finally, we would also like to thank the anonymous referees for their relevant comments and criticisms.

# References

- [1] Baker N.L. and R. Daley, 2000 : Observation and background adjoint sensitivity in the adaptive observation targeting problem. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* , **126** , 1431,1454.
- [2] Baker N.L., 2000: observation adjoint sensitivity and the adaptive observation-targeting problem. *Ph. D. thesis*, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, 241pp.
- [3] Bergot T., G. Hello, A. Joly, S. Malardel, 1999 : Adaptive Observations : a feasibility study. *Mon. Weather Rev.*, **127** , 743-765.
- [4] Bergot T., 1999 : Adaptive Observations during FASTEX : A systematic survey of upstream flights. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* , **125** , 3271-3298.
- [5] Bergot T., 2001 : Influence of the assimilation scheme on the efficiency of adaptive observations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* , **127** , 635-661.
- [6] Berliner L.M., Z.Q. Lu, C. Snyder, 1999 : Statistical Design for Adaptive Weather Observations. *J. Atmos. Sci.*, **56** , 2536-2552.
- [7] Bishop C.H., Z. Toth, 1999 : Ensemble transformation and adaptive observations. *J. Atmos. Sci.*, **56** , 1748-1565.
- [8] Bishop C.H., B.J. Etherton and S.J. Majumdar, 2001 : Adaptive sampling with the ensemble transform Kalman filter. Part I : Theoretical aspects *Mon. Weather Rev.*, **129** , 420-436.
- [9] Courtier Ph., C. Freydier, J.F. geleyn, F. Rabier, M. Rochas, 1991: The ARPEGE project at Météo-France" *ECMWF, workshop on numerical methods in atmospheric models, Reading, UK, 9-13 Sept* , 193-231 .

- [10] Doerenbecher A. and T. Bergot 2001 : Sensitivity to observations applied to FASTEX cases. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **8**, in press.
- [11] Emanuel K.A. and R.H. Langland, 1998: FASTEX Adaptive Observation workshop. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **79**, 1915-1919.
- [12] Errico R., 1997: What is an adjoint model? *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **78**, 2577-2591.
- [13] Fedorov V.V., W.J. Studden and E.M. Klimko, 1972: Theory of optimal experiment. *Academic Press*, 292pp
- [14] Fisher M. and P. Courtier, 1995: Estimating the covariance matrices of analysis and forecast error in variational data assimilation. *ECMWF Tech. Memo*, **220**
- [15] Gelaro R., R.H. Langland, G.D. Rohaly, T.E. Rosmond, 1999 : An assessment of the singular vector approach to targeted observing using the FASTEX dataset. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125** , 3299-3328.
- [16] Harrison M.S.J., T. Palmer, D.S. Richardson, R. Buizza, 1999 : Analysis and model dependencies in medium-range ensembles : two transplant case studies. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125** , 2487-2515.
- [17] Joly A., K.A. Browning, P. Bessemoulin, J.P. Cammas, G. Caniaux, J.P. Chalon, S.A. Clough, R. Dirks, K.A. Emanuel, L. Eymard, F. Lalaurette, R. Gall, T.D. Hewson, P.H. Hildebrand, D. Jorgensen, R.H. Langland, Y. Lemaitre, P. Mascart, J.A. Moore, P.O.G. Persson, F. Roux, M.A. Shapiro, C. Snyder, Z. Toth, R.M. Wakimoto, 1999: Overview of the field phase of the Fronts and Atlantic Storm Track Experiment (FASTEX) project. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* , **125**, 3131-3164.

- [18] Langland R.H., Z. Toth, R. Gelaro, I. Szynogoh, M.A. Shapiro, S.J. Majumdar, R. Morss, G.D. Rohaly, C. Velden, N. Bonds, C.H. Bishop, 1999: The North Pacific Experiment8 (Norpex-98) : targeted observations for improved North American Weather Forecasts. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **80**, 1363-1384.
- [19] Langland R.H., R. Gelaro, G.D. Rohaly, M.A. Shapiro, 1999: Targeted observations in FASTEX : Adjoint-based targeting procedures and data impact experiments in IOPs 17 and 18. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* , **125**, 3241-3270.
- [20] Lorenz E.N. and K.A. Emanuel, 1998: Optimal sites for supplementary observation : simulation with a small model. *J. Atmos. Sci.*, **55** 399-414.
- [21] Majumdar S.J., C.H. Bishop, B.J. Etherton, I. Szunyoght and Z. Toth, 2001: Can an ensemble transform Kalman filter predict the reduction in forecast error variance produced by targeted observations? *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, , accepted.
- [22] Morss R.E, 1999: Adaptive observations: idealized sampling strategies for improving numerical weather prediction. *Ph. D. thesis*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 225pp.
- [23] Morss R.E, K.A. Emanuel and C. Snyder, 2001: Idealized adaptive observation strategies for improving numerical weather prediction. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 210-234.
- [24] Palmer T.N., R. Gelaro, J. Barkmeijer, R. Buizza, 1998 : Singular vectors metrics and adaptive observations. *J. Atmos. Sci.*, **55** , 633-653.
- [25] Rabier F., E. Klinker, P. Courtier, A. Hollingsworth, 1996: Sensitivity of forecast errors to initial conditions. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **122**, 121-150.

- [26] Szunyogh I., Z. Toth, R. Morss, S. Majumdar, B.J. Etherton, C.H. Bishop, 2000: The effect of targeted dropsonde observations during the 1999 Winter Storm Reconnaissance Program. *Mon. Weather Rev.* , **128**, 3520-3537.

# List of Tables

1	<i>Improvement of the forecast due to the inclusion of targeted data for the four cases studied, see Figure 8 of Bergot (2001) for more detail. . . . .</i>	36
---	---	----

# List of Figures

1	<i>experiment for an aspect ratio <math>L_b/L_g = 0.1</math>. (a) : diagonal terms of the covariance analysis matrix <math>A_{c+t}</math>; (b) : sensitivity to initial conditions <math>\nabla_x J</math>; (c) : sensitivity to targeted observation <math>\nabla_{yt} J</math> (d) : reduction of the variance of the forecast error <math>(\delta\sigma_S^t)^2</math>. For figure (c) and (d) the value of the sensitivity to observation and of the reduction of variance is plotted with a '+' sign for the different location of the single targeted observation. The big '+' sign corresponds to the optimal location for the sensitivity to observation method, while the big '*' sign corresponds to the optimal location for the KFS method (as explained in the text, both optimal locations are the same for this particular case). . . . .</i>	37
2	<i>same as fig1 for an aspect ratio <math>L_b/L_g = 0.4</math> . . . . .</i>	38
3	<i>same as fig1 for an aspect ratio <math>L_b/L_g = 2.0</math> . . . . .</i>	39
4	<i>variation of <math>A_c \cdot \nabla_x J</math> in function of the aspect ratio <math>L_b/L_g</math> . . . . .</i>	40
5	<i>variation of <math>(\delta\sigma_S^t)^2</math> in function of the accuracy of the measurement, for the three studied aspect ratio (solid line : <math>L_b/L_g = 0.1</math>, mixed line : <math>L_b/L_g = 0.4</math>, dotted line : <math>L_b/L_g = 2.0</math>. . . . .</i>	41

6	same as fig1 for the coast line case and an aspect ratio $L_b/L_g = 0.1$ . The conventional observation are plotted with a '+' sign in figure (a) and (b). The big '+' sign corresponds to the optimal location for the sensitivity to observation method, while the big '*' sign corresponds to the optimal location for the proposed method. Both optimal locations are the same for this aspect ratio. . . . .	42
7	same as fig6 for an aspect ratio $L_b/L_g = 0.4$ . . . . .	43
8	same as fig6 for an aspect ratio $L_b/L_g = 2.0$ . . . . .	44
9	The variance of the forecast score for the four studied cases. left to right bars : without data, $(\nabla_x J)^T \cdot B \cdot \nabla_x J$ ; with conventional data only, $(\nabla_x J)^T \cdot A_c \cdot \nabla_x J$ ; with targeted data only, $(\nabla_x J)^T \cdot A_t \cdot \nabla_x J$ ; and with targeted data added to conventional ones, $(\nabla_x J)^T \cdot A_{c+t} \cdot \nabla_x J$ . . . . .	45
10	black dot : GIV flight for IOP18 (22 Feb 1997). (a) the sensitivity field for temperature at model level 23, about 800hPa (b) product of the sensitivity field and the conventional analysis error variance, $A_c \cdot \nabla_x J$ . . . . .	46
11	vertical crosses section along 48N. Same legend as in figure 10 . . . . .	47
12	Reduction of the forecast error variance given by the KFS method (a), and forecast error (b), for the experiment where targeted observations are only temperature measurements (called "temp") or only wind measurements (called "wind"). . . . .	48



investigated IOP	initial time	final time	improvement (J/Kg)
IOP15	06UTC 15 Feb. 1997	00UTC 16 Feb. 1997 (18h)	42.68
IOP17	18UTC 17 Feb. 1997	12UTC 19 Feb. 1997 (42h)	329.39
IOP17	18UTC 18 Feb. 1997	12UTC 19 Feb. 1997 (18h)	37.26
IOP18	12UTC 22 Feb. 1997	12UTC 23 Feb. 1997 (24h)	147.47

Table 1: *Improvement of the forecast due to the inclusion of targeted data for the four cases studied, see Figure 8 of Bergot (2001) for more detail.*

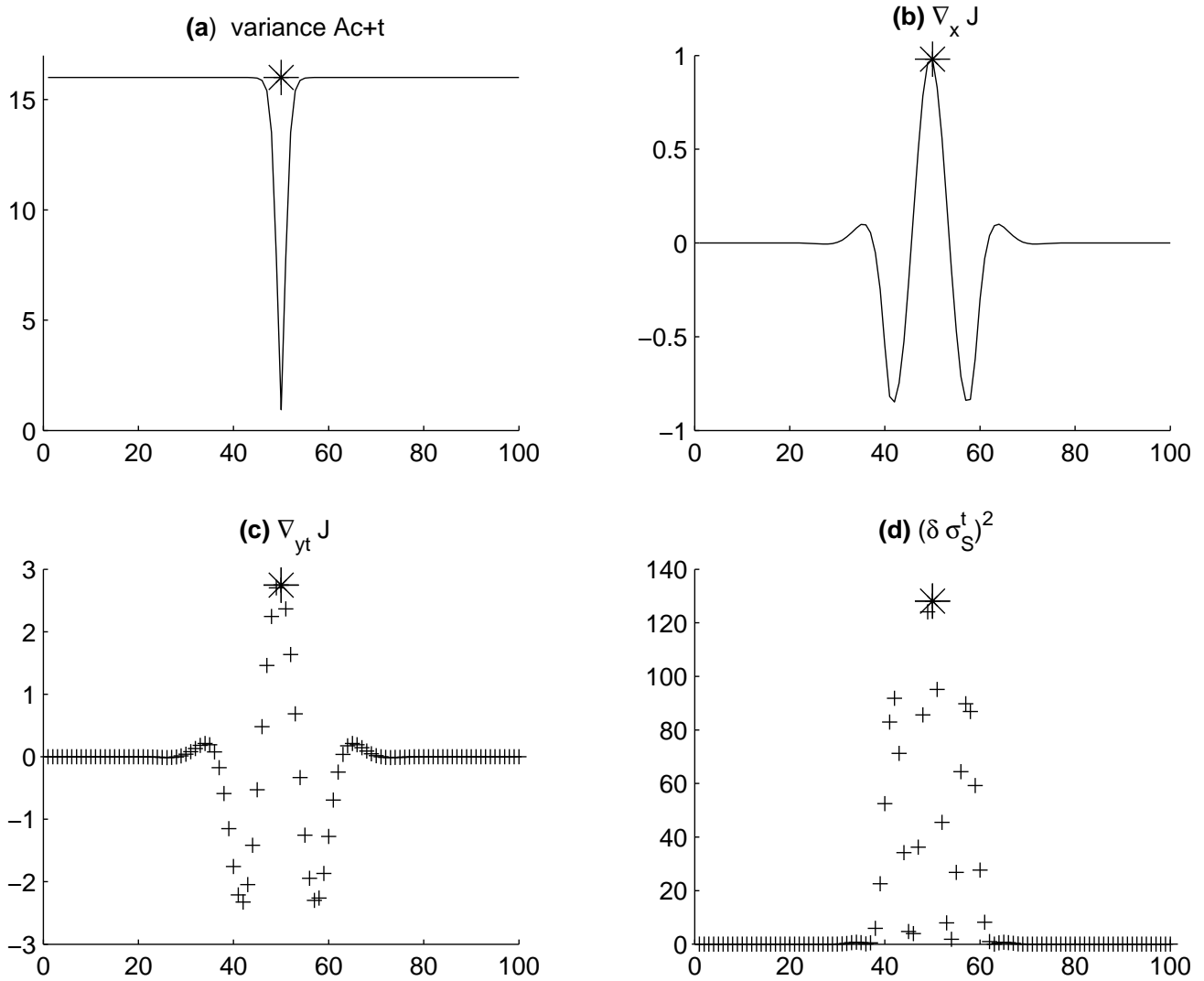


Figure 1: *experiment for an aspect ratio  $L_b/L_g = 0.1$ . (a) : diagonal terms of the covariance analysis matrix  $A_{c+t}$ ; (b) : sensitivity to initial conditions  $\nabla_x J$ ; (c) : sensitivity to targeted observation  $\nabla_{yt} J$  (d) : reduction of the variance of the forecast error  $(\delta\sigma_S^t)^2$ . For figure (c) and (d) the value of the sensitivity to observation and of the reduction of variance is plotted with a '+' sign for the different location of the single targeted observation. The big '+' sign corresponds to the optimal location for the sensitivity to observation method, while the big '\*' sign corresponds to the optimal location for the KFS method (as explained in the text, both optimal locations are the same for this particular case).*

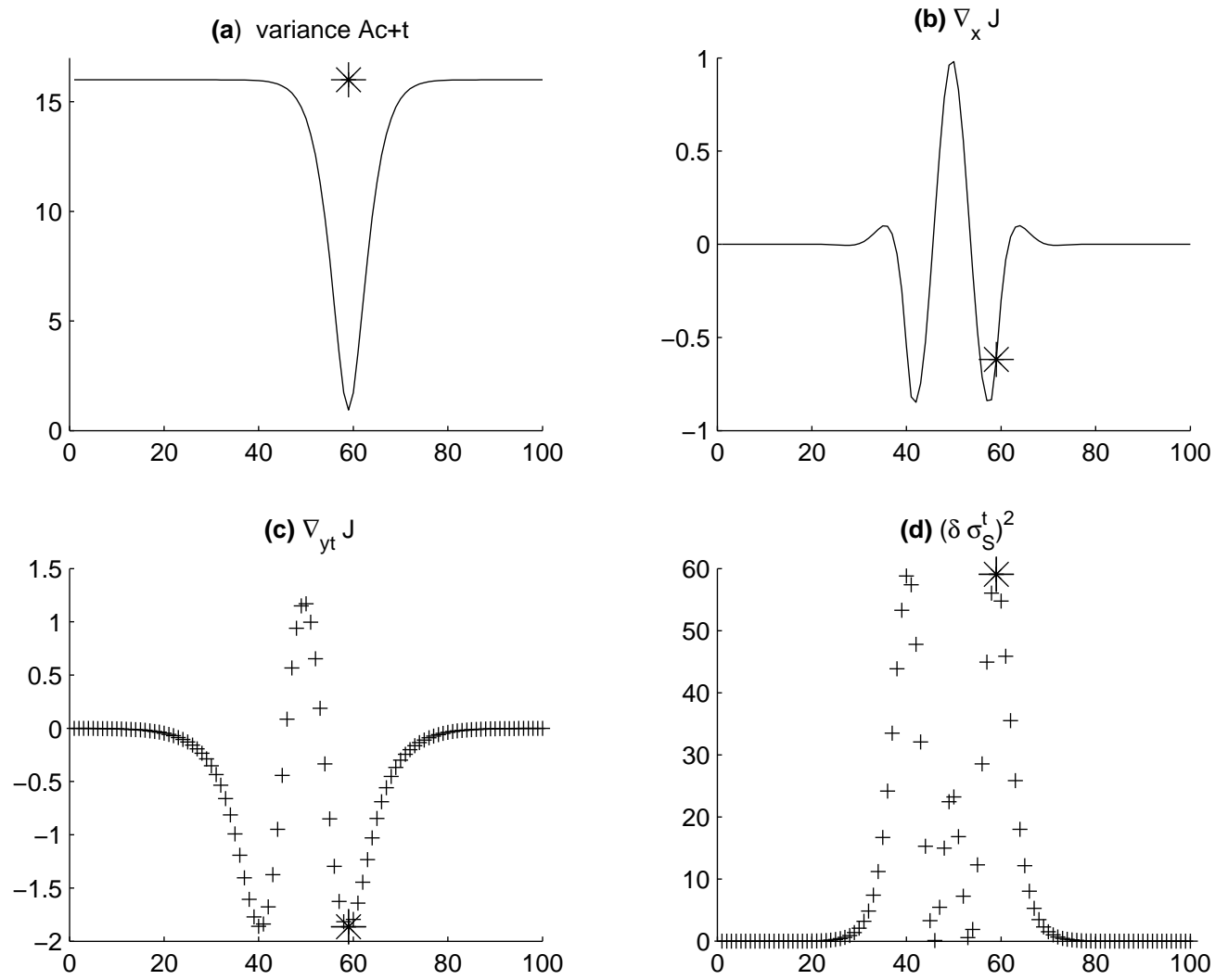


Figure 2: same as fig1 for an aspect ratio  $L_b/L_g = 0.4$

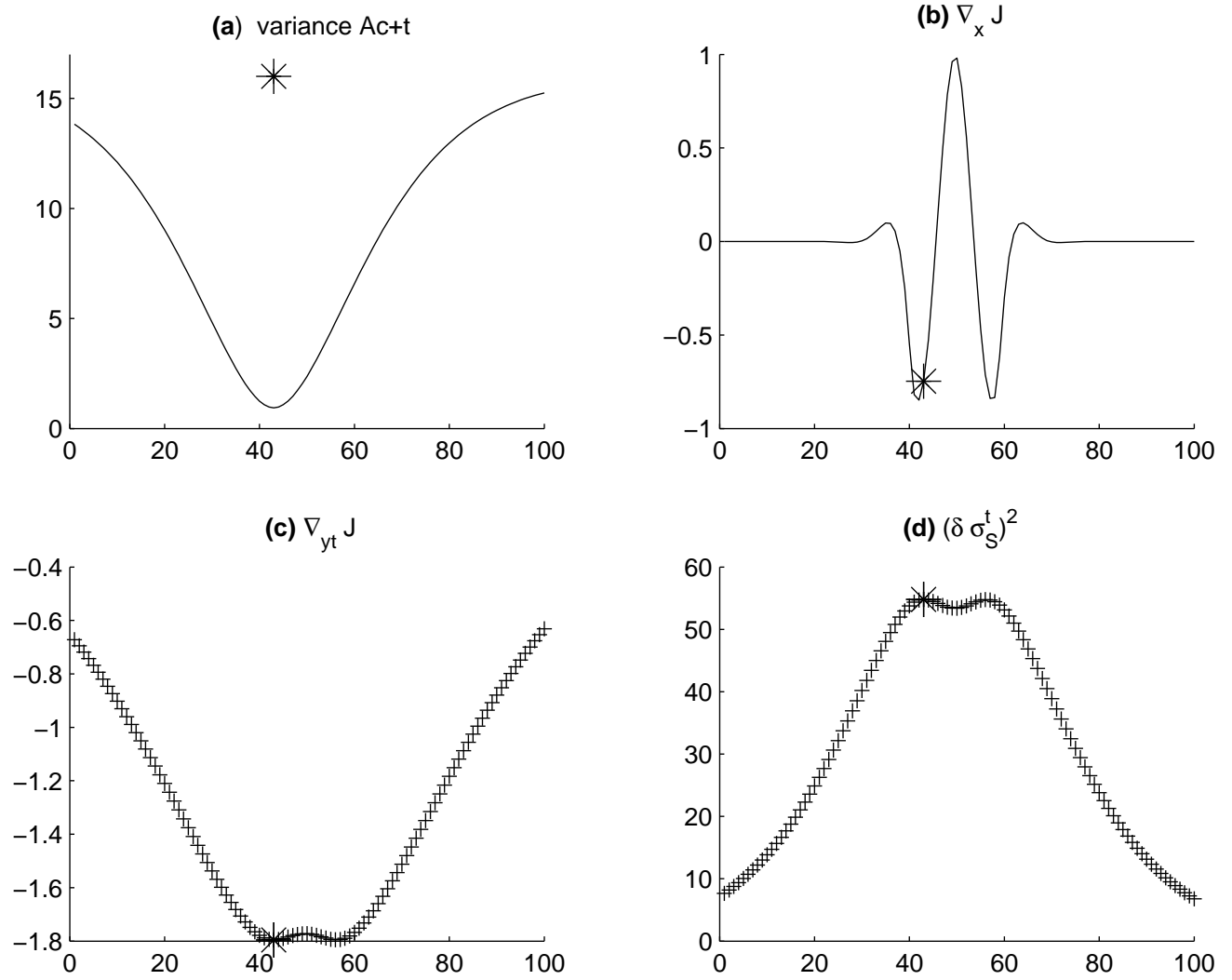


Figure 3: same as fig1 for an aspect ratio  $L_b/L_g = 2.0$

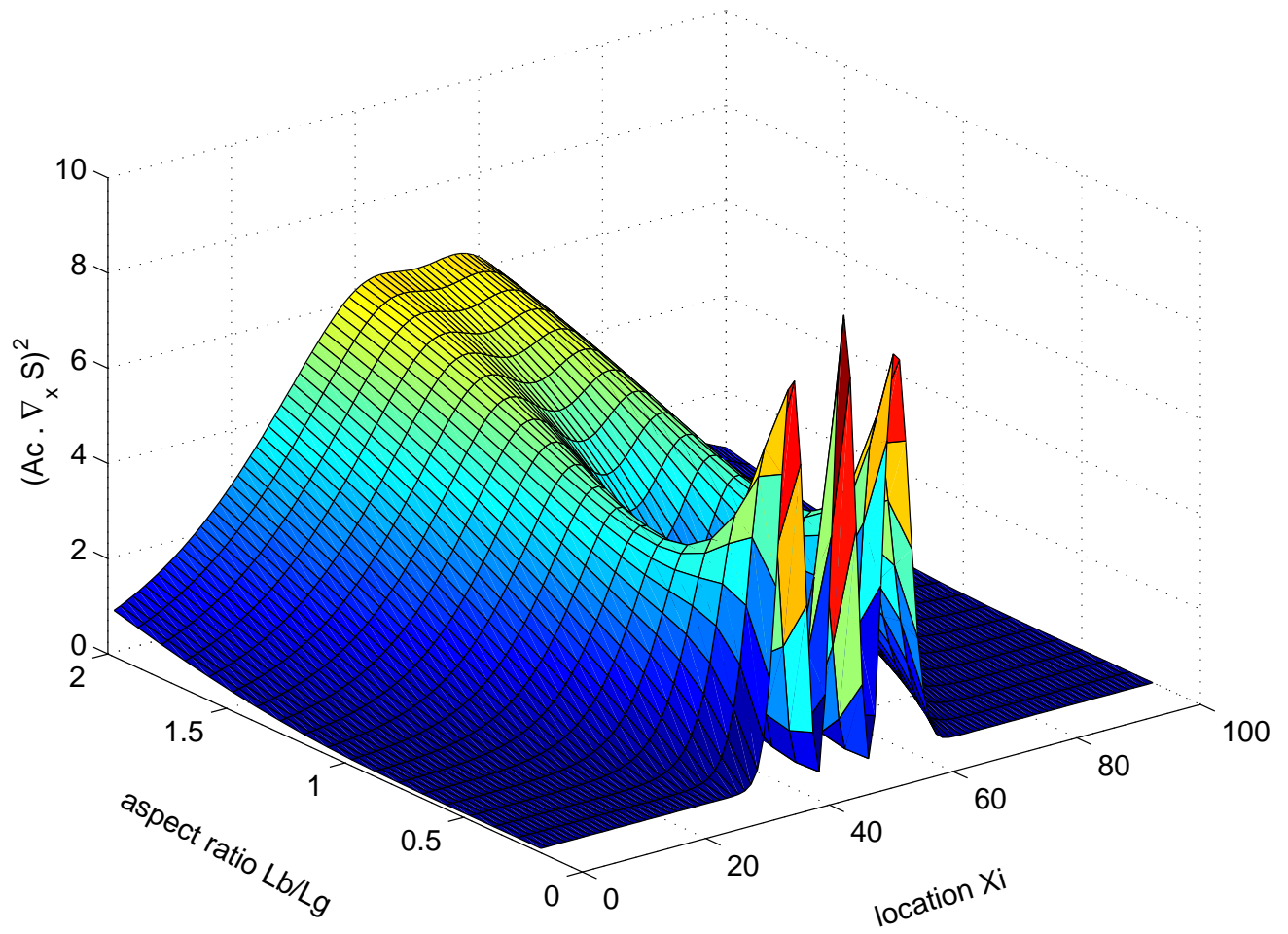


Figure 4: variation of  $A_c \cdot \nabla_x J$  in function of the aspect ratio  $L_b/L_g$

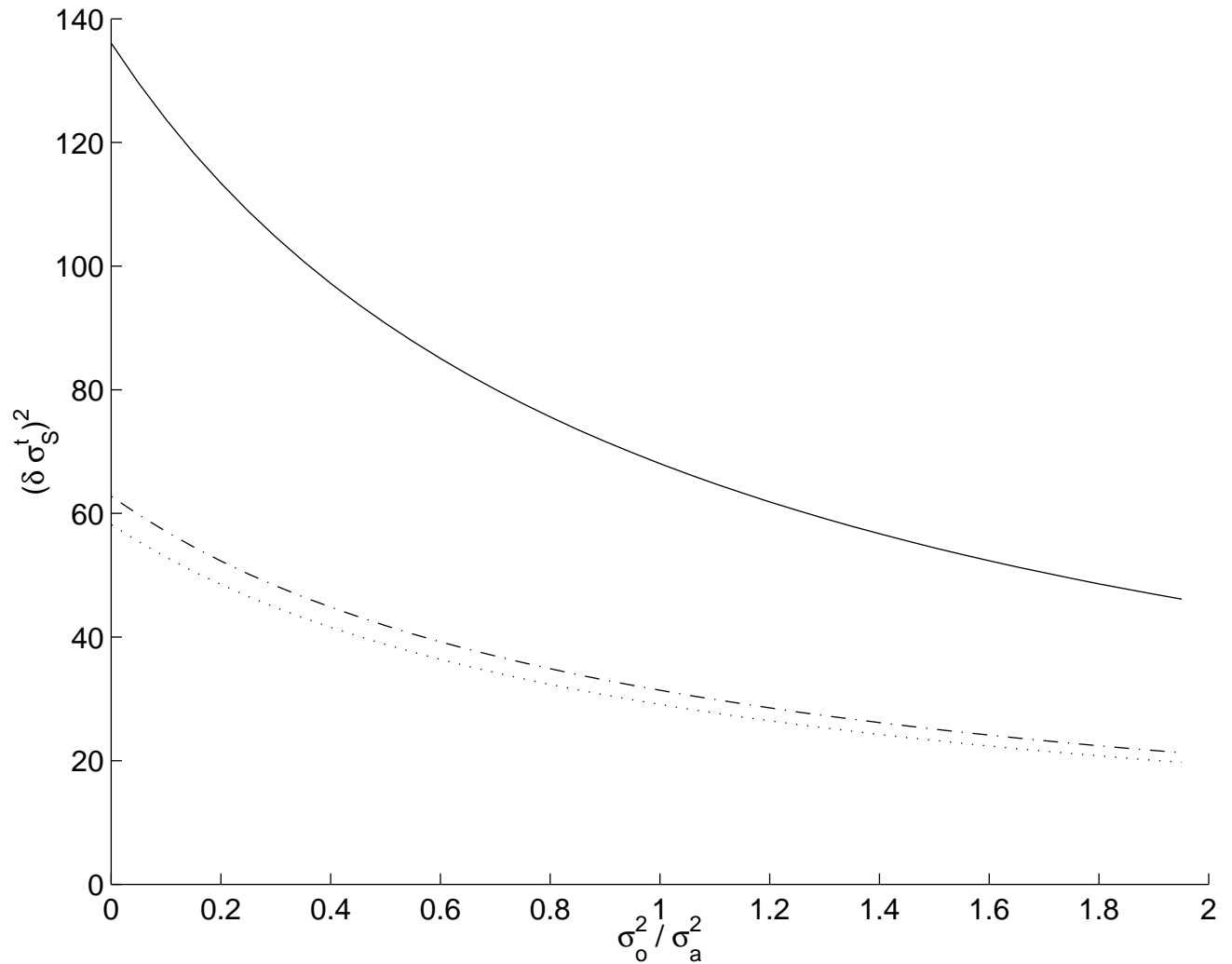


Figure 5: variation of  $(\delta\sigma_S^t)^2$  in function of the accuracy of the measurement, for the three studied aspect ratio (solid line :  $L_b/L_g = 0.1$ , mixed line :  $L_b/L_g = 0.4$ , dotted line :  $L_b/L_g = 2.0$ ).

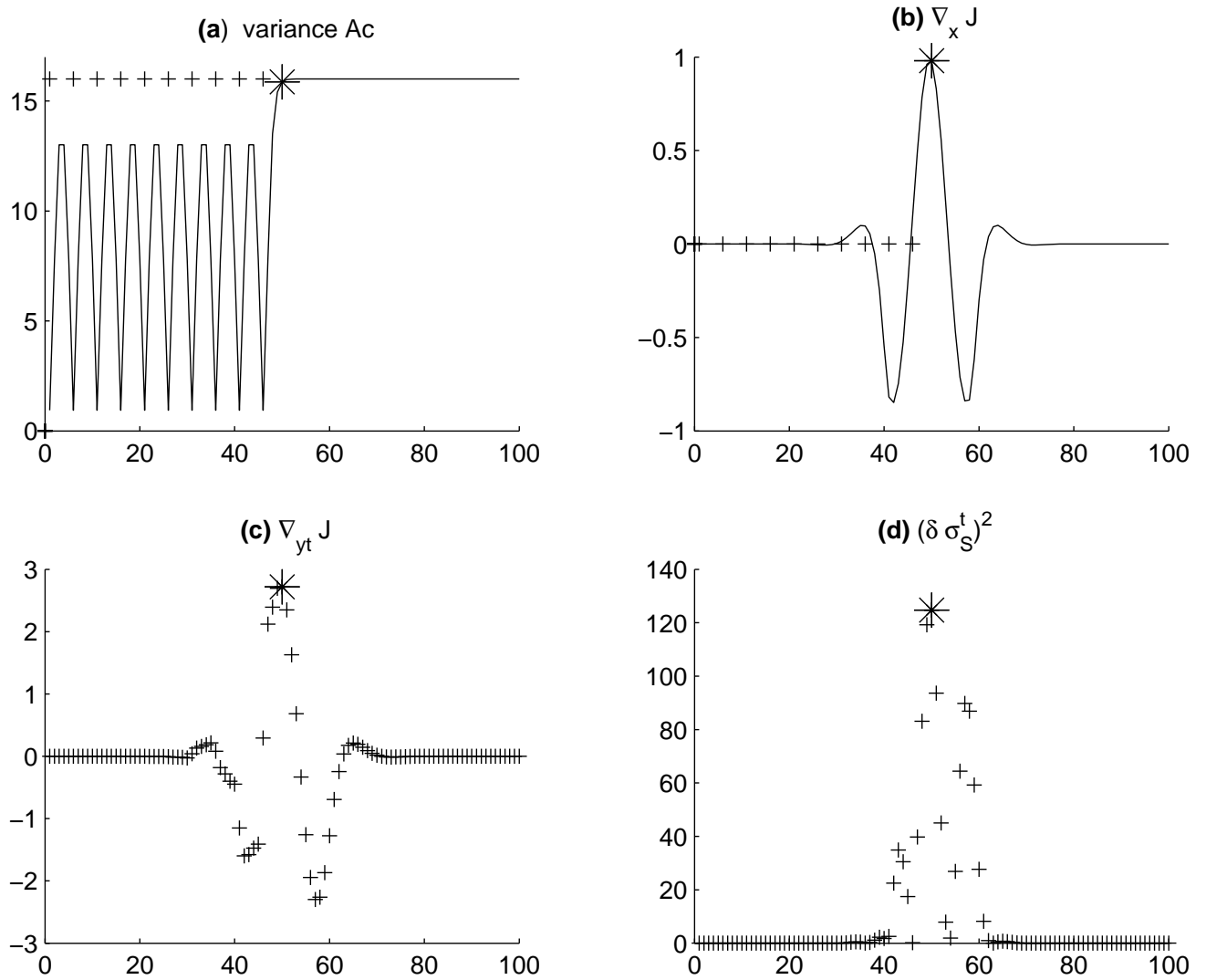


Figure 6: same as fig1 for the coast line case and an aspect ratio  $L_b/L_g = 0.1$ . The conventional observation are plotted with a '+' sign in figure (a) and (b). The big '+' sign corresponds to the optimal location for the sensitivity to observation method, while the big '\*' sign corresponds to the optimal location for the proposed method. Both optimal locations are the same for this aspect ratio.

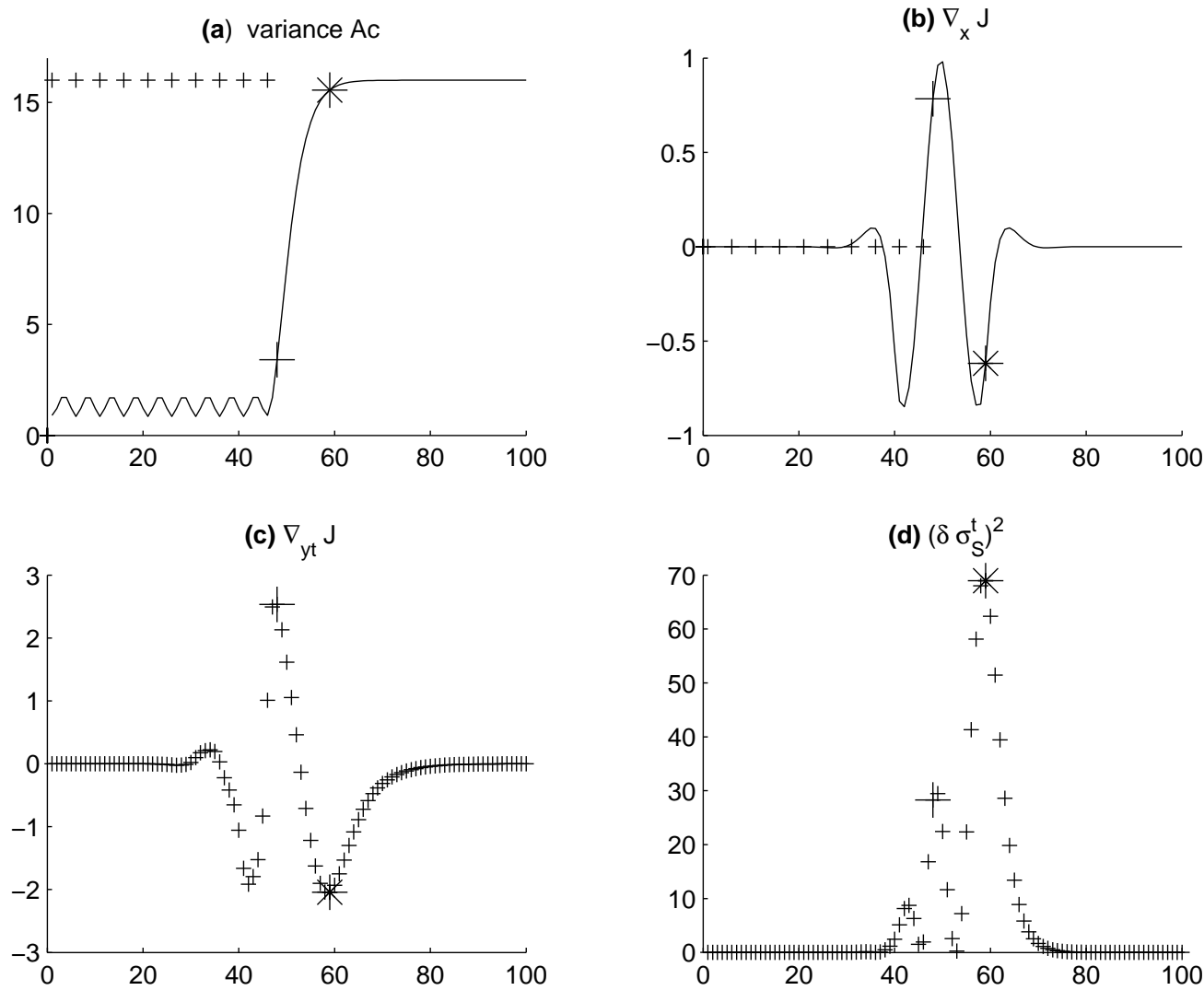


Figure 7: same as fig6 for an aspect ratio  $L_b/L_g = 0.4$



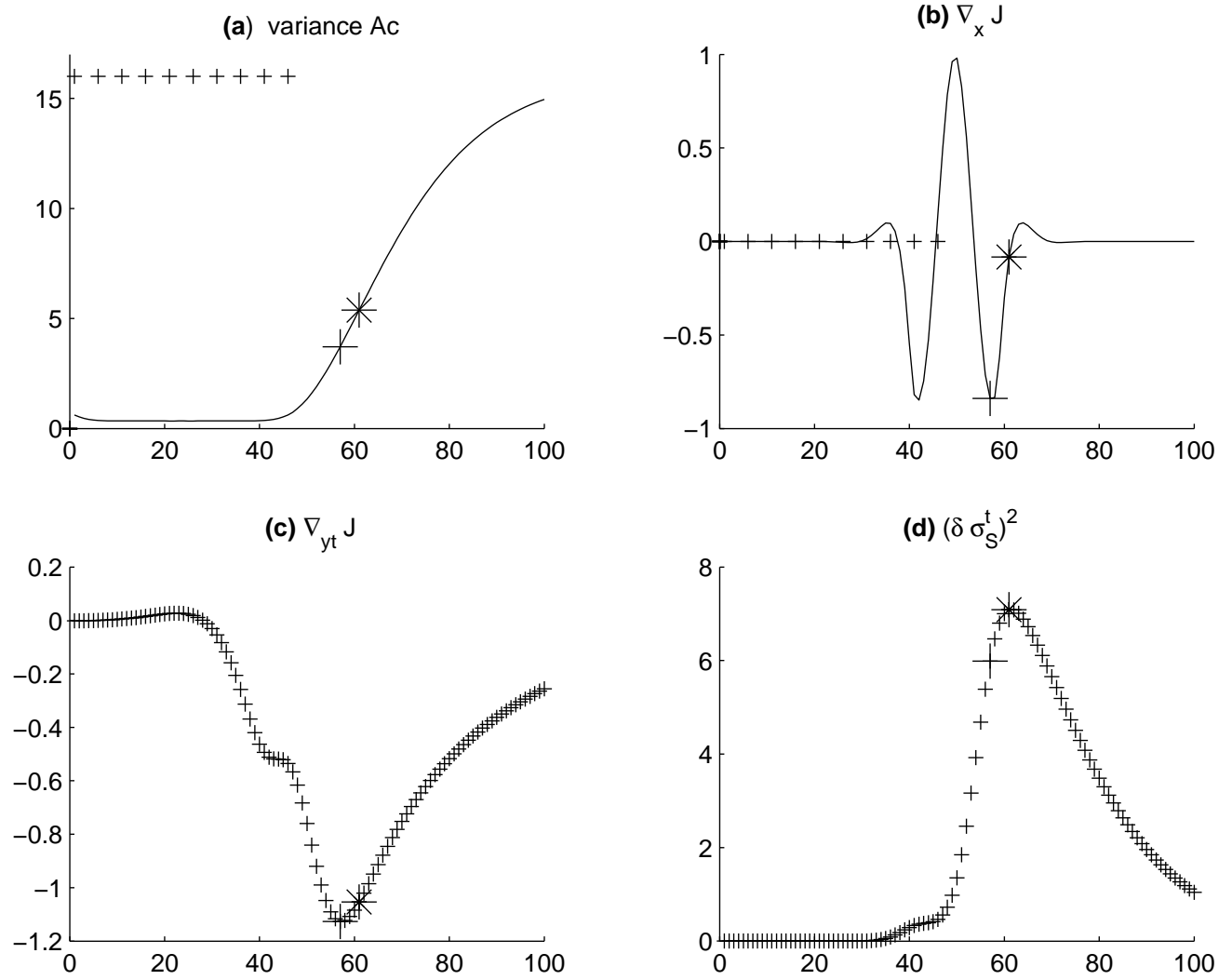


Figure 8: same as fig6 for an aspect ratio  $L_b/L_g = 2.0$

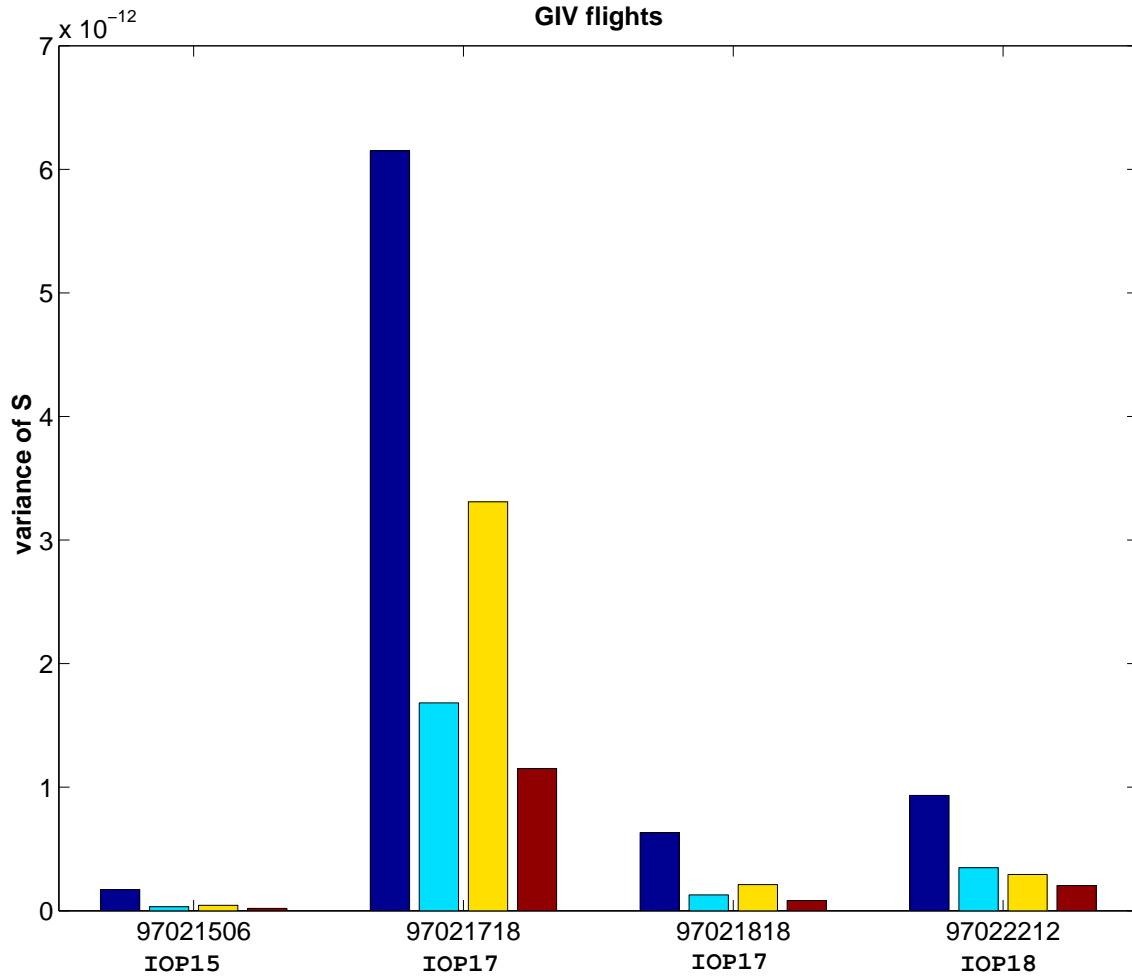


Figure 9: *The variance of the forecast score for the four studied cases. left to right bars : without data,  $(\nabla_x J)^T \cdot B \cdot \nabla_x J$ ; with conventional data only,  $(\nabla_x J)^T \cdot A_c \cdot \nabla_x J$ ; with targeted data only,  $(\nabla_x J)^T \cdot A_t \cdot \nabla_x J$ ; and with targeted data added to conventional ones,  $(\nabla_x J)^T \cdot A_{c+t} \cdot \nabla_x J$ .*

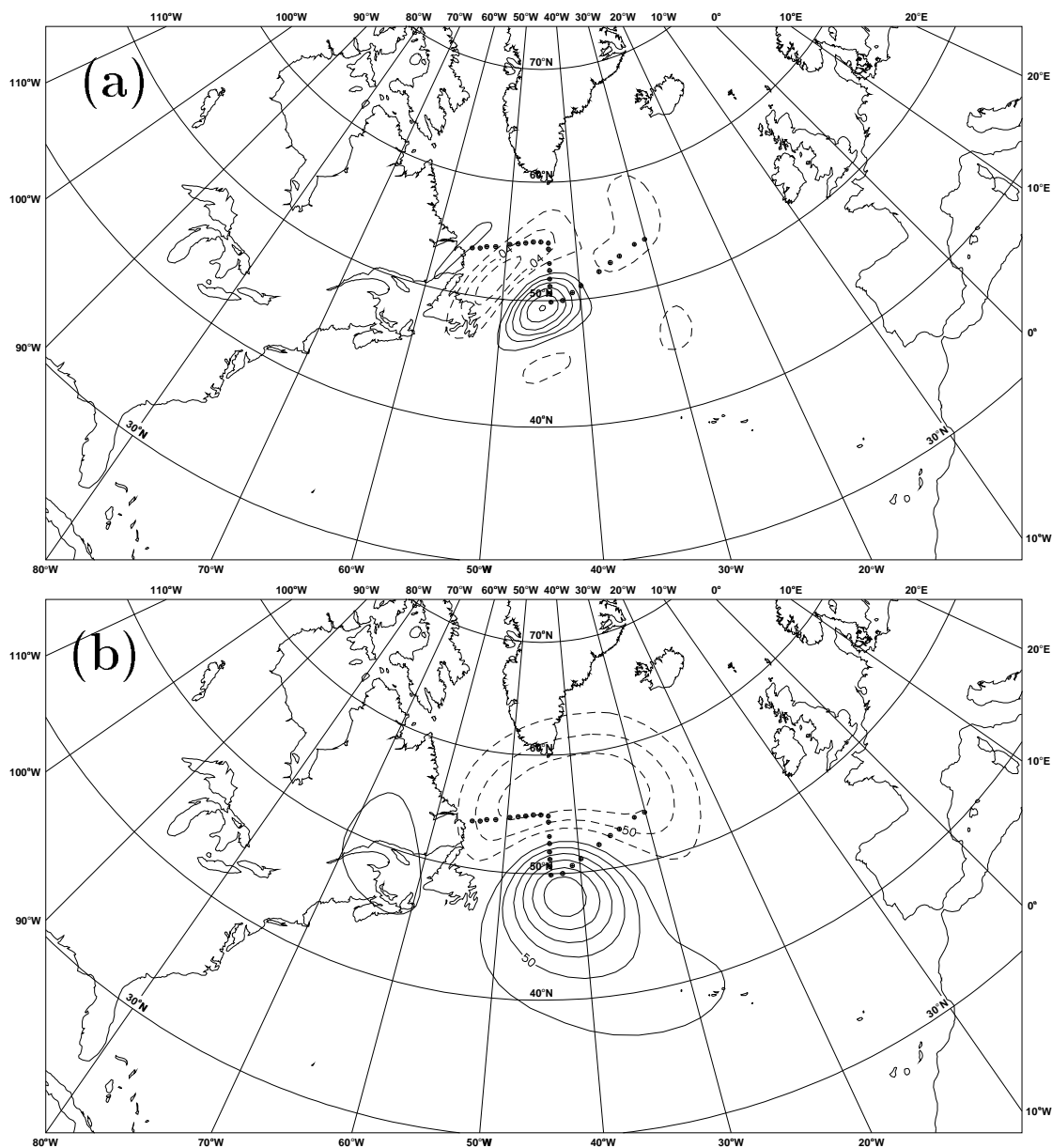


Figure 10: *black dot : GIV flight for IOP18 (22 Feb 1997). (a) the sensitivity field for temperature at model level 23, about 800hPa (b) product of the sensitivity field and the conventional analysis error variance,  $A_c \cdot \nabla_x J$*

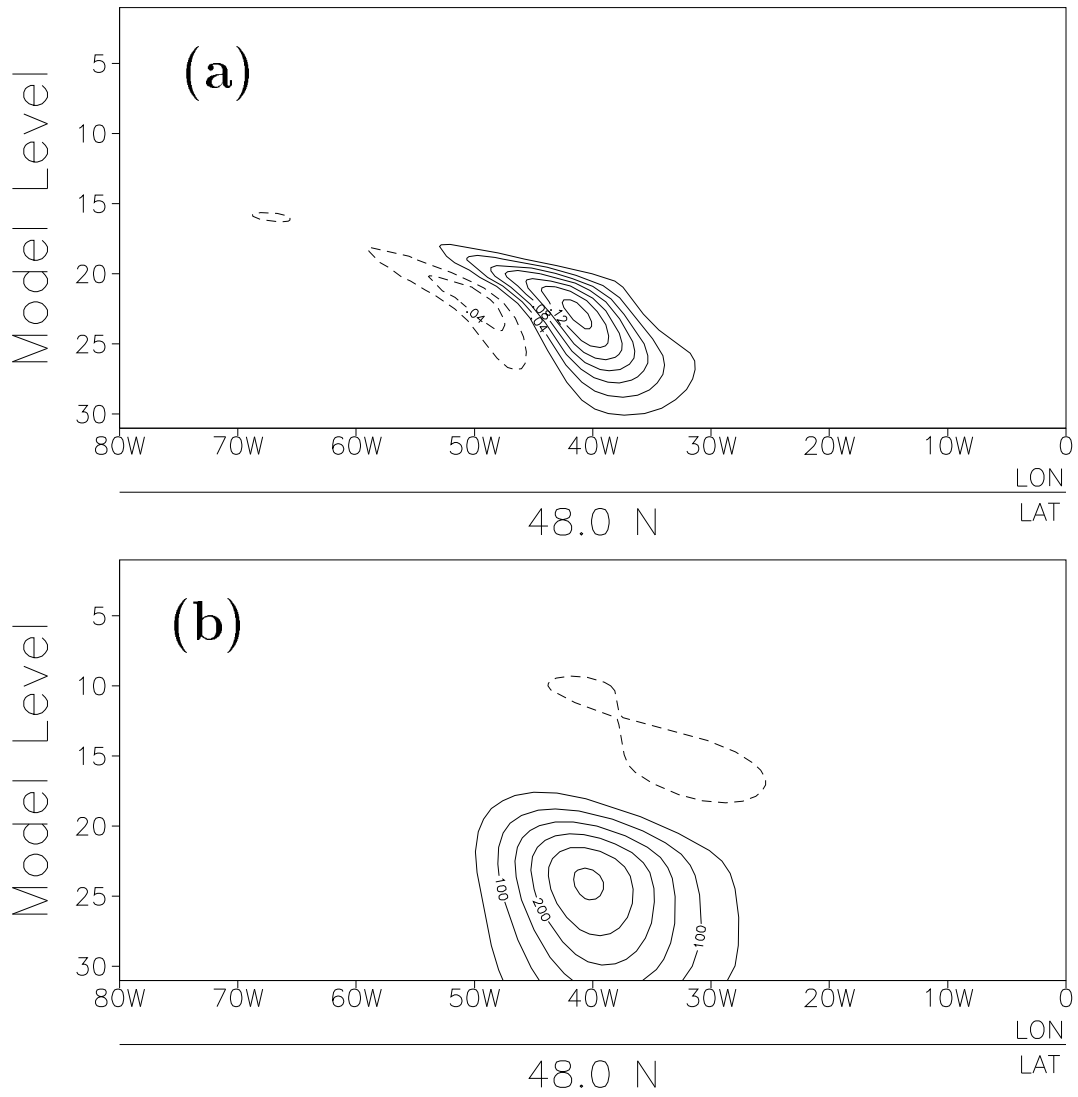


Figure 11: vertical crosses section along 48N. Same legend as in figure 10

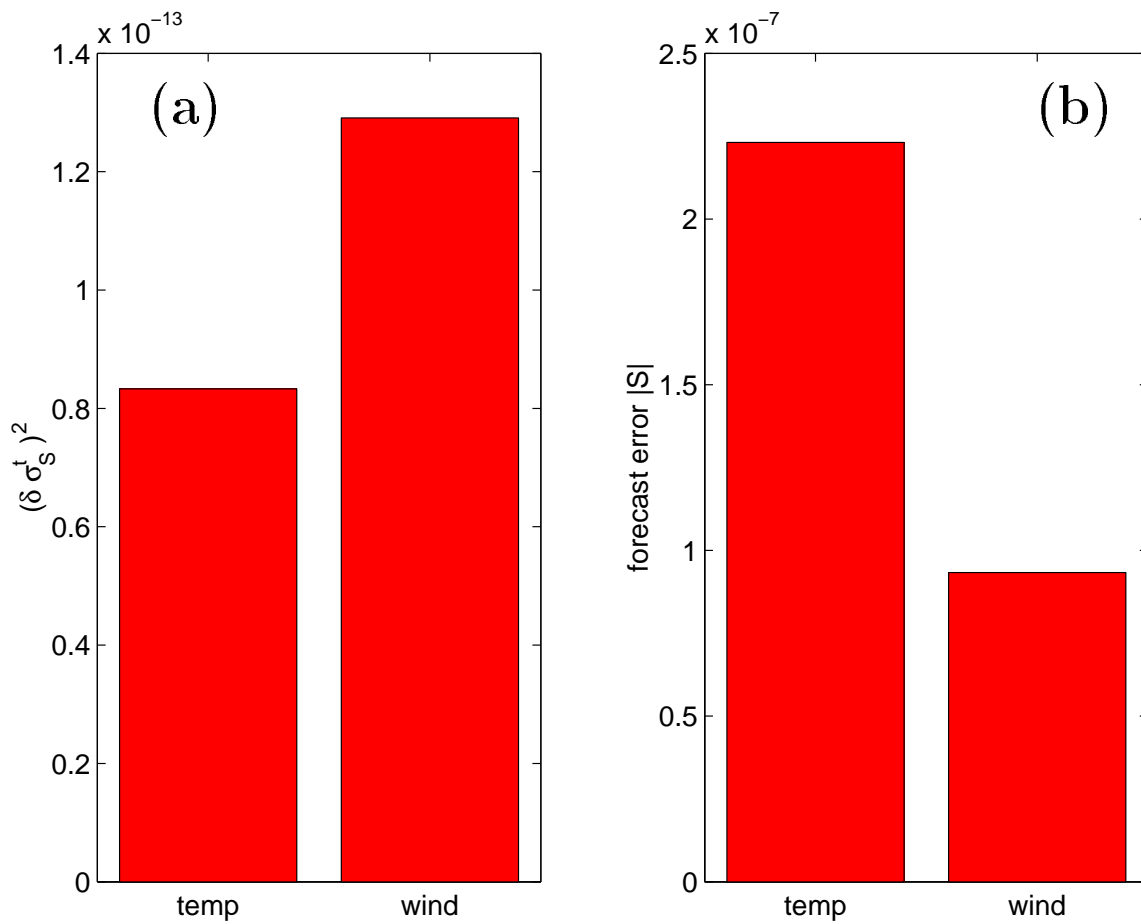


Figure 12: *Reduction of the forecast error variance given by the KFS method (a), and forecast error (b), for the experiment where targeted observations are only temperature measurements (called "temp") or only wind measurements (called "wind").*



## 6.3 Résultats obtenus avec deux stratégies sub-optimales

Nous nous proposons maintenant d'utiliser la méthode *KFS* (présentée précédemment dans l'article à paraître dans le *Quarterly Journal*) dans un contexte pronostique. Pour cela, nous allons être amenés à définir des stratégies de déploiement que l'on qualifiera de *sub-optimales*.

### 6.3.1 Exemple de critère de sélection des déploiements

Lors de la campagne FASTEX, le critère essentiel pour le tracé des plans de vols *objectifs* était de traverser le plus de cibles possible et de façon assez centrale, de manière à ce que les sondes soient déployées au-dessus de valeurs extrêmes de sensibilité.

Dans le cas présent, on souhaite prendre en compte le système d'assimilation qui doit utiliser les observations qui seront déployées ainsi que les observations conventionnelles. La finalité du déploiement adaptatif peut être d'avoir un impact sur la variance d'un aspect de la prévision. Cet aspect de la prévision est caractérisé par une fonction  $\mathcal{J}$  parfois appelée fonction coût. On peut associer, par exemple, l'activité cyclonique d'une dépression et le calcul de l'entrophie de l'atmosphère sur la zone de localisation prévue de cette dépression (fonction  $\mathcal{J}$ ). Assurer la prévision de cette dépression revient à réduire la variance des erreurs d'estimation de la fonction  $\mathcal{J}$  par l'ajout d'observations supplémentaires.

#### Variance de l'erreur de la fonction $\mathcal{J}$

Résumons tout d'abord la méthode *KFS* présentée dans l'article de la partie 6.2 (Bergot et Doerenbecher, 2002). Soit  $\mathcal{S}$  une mesure de l'erreur d'estimation de la fonction  $\mathcal{J}$  réelle  $\mathcal{J}^t = \mathcal{J}(\mathbf{x}^t)$ :

$$\mathcal{S} = \mathcal{J}(\mathbf{x}^f) - \mathcal{J}(\mathbf{x}^t) \quad (6.1)$$

Cette évaluation peut être qualifiée de non-linéaire puisque l'on fait usage du modèle de prévision numérique ainsi que de la fonction  $\mathcal{J}$  qui est quadratique, dans le cas de l'entrophie notamment.

Si l'estimation de  $\mathcal{S}$  est non biaisée, la variance de  $\mathcal{S}$  s'écrit alors comme :

$$Var(\mathcal{S}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}^T \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J} \quad (6.2)$$

Dans le cas où on considère l'apport des observations ciblées par rapport aux observations conventionnelles, on peut ainsi comparer la variance de  $\mathcal{S}$  dans les deux expériences avec ou sans observations ciblées. Cela revient à étudier la différence  $\Delta Var(\mathcal{S})$  entre  $Var(\mathcal{S}_t)$  et  $Var(\mathcal{S}_{ct})$ .

$$Var(\mathcal{S}_c) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}^T \mathbf{A}_c \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J} \quad (6.3a)$$

$$Var(\mathcal{S}_{ct}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}^T \mathbf{A}_{ct} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J} \quad (6.3b)$$

L'équation de **Shermann-Morrisson-Woodbury** permet d'obtenir une estimation de la réduction de variance d'erreur sur  $\mathcal{S}$  :

$$\Delta Var(\mathcal{S}) = Var(\mathcal{S}_c) - Var(\mathcal{S}_{ct}) \quad (6.4a)$$

$$= \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}^T \mathbf{A}_c \mathbf{H}_t^T (\mathbf{R}_t + \mathbf{H}_t \mathbf{A}_c \mathbf{H}_t^T)^{-1} \mathbf{H}_t \mathbf{A}_c \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J} \quad (6.4b)$$

Cette estimation de la réduction de la variance de  $\mathcal{S}$  entre les expériences avec et sans observations adaptatives est à la base de la méthode *KFS* et servira de critère pour la sélection de déploiements adaptatifs testés dans les expériences dont nous présentons les résultats dans les paragraphes suivants.

### 6.3.2 Première stratégie : itérative et avec une observation unique

#### Principe de l'approche

La première stratégie sub-optimale (notée stratégie **I** dans la suite de cette partie) consiste à tester le critère de sélection pour l'ajout d'une seule observation à la fois, dont on a fixé les caractéristiques et les positions potentielles. La sélection de l'observation la plus optimale se fait par discrimination entre les diverses propositions testées.

Pour chaque test, l'utilisation d'une observation unique constitue une contrainte forte sur la dimension de  $\mathbf{H}_t$ . Une fois que l'observation qui satisfait au mieux le critère de sélection est connue, celle-ci rejoint les observations conventionnelles simulées pour une nouvelle série d'expériences. Cette nouvelle série permet de déterminer la position de l'observation ciblée suivante. C'est une nouvelle itération de l'algorithme sub-optimal de détermination d'un déploiement d'observations ciblées.

L'algorithme atteint son objectif et s'arrête soit au bout d'un nombre fixé d'itérations soit après que l'effet cumulé sur le critère de sélection de toutes les observations ainsi déterminées ait atteint un seuil de satisfaction déterminé à l'avance lui aussi.

#### Mise en œuvre

Nous avons mené une expérience de ce type sur le cas du premier vol du **G-IV** de la POI17, c'est-à-dire le 17 février à 18h TU. Lors de la première itération, nous avons testé 48 positions pour une observation de température placée à 600 *hPa*. La figure (6.1) donne les différentes positions testées pour ces observations supplémentaires. Les observations sont assimilées comme les données du **G-IV** - données de type radiosondage - et les erreurs d'observation  $\varepsilon$  voient leurs statistiques ( $\sigma_o$ ) fixées en conséquence.

Afin de nous placer dans le cadre pronostique, le calcul de sensibilité aux conditions initiales se fait sur une prévision issue de l'ébauche qui est elle-même une prévision à 6 heures d'échéance issue de l'analyse précédente.



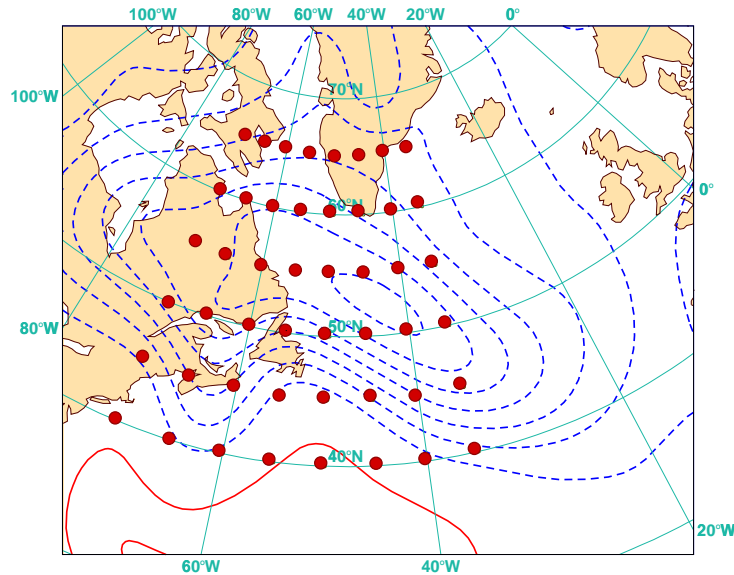


FIG. 6.1: Positions (au nombre de 48) testées dans le cadre de la première stratégie (itérative et avec une observation unique) afin de sélectionner une observation supplémentaire de température à 600 hPa. L'espacement des positions est de  $5^\circ$  en longitude et latitude. Le champ montré en arrière-plan est le vecteur  $\mathbf{c}_c$  (calculé avec  $\mathbf{A}_c$  et  $\nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$ ). (Valeurs extrêmes:  $\min \simeq -29.2 \times 10^{-8}$  et  $\max \simeq 8.4 \times 10^{-8} \text{ K.s}^{-2}$ )

La sensibilité aux conditions initiales n'est donc plus notée  $\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$ , mais  $\nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$  (on réserve l'expression  $\nabla_{\mathbf{x}_a} \mathcal{J}$  à la sensibilité à l'ébauche comme on l'a définie dans l'équation (2.40) et qui n'est pas la même quantité qu'ici).

Dans ces expériences, le réseau conventionnel devrait être simulé. Pour des raisons pratiques, nous avons choisi d'utiliser tout simplement celui qui se trouve à notre disposition puisque ces tests pronostiques sont effectués a posteriori. La simulation de ce réseau n'est cependant pas un obstacle technique en ce qui concerne les observations in situ par des plateformes dont la localisation est connue.

Ainsi, grâce à l'équation (6.4b), on teste l'impact du placement en tel ou tel point d'une observation de température supplémentaire. Cet impact est évalué sur les variances d'erreur de la mesure  $\mathcal{S}$  de la qualité d'un aspect de la prévision.

Afin de bien noter l'importance du choix du critère de sélection sur ces stratégies, nous avons aussi essayé un critère de type FASTEX, basé sur le maximum de sensibilité. Le critère ainsi nommé *FASTEX* est estimé par  $\mathbf{h}_t \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$ , où  $\mathbf{h}_t$  est l'opérateur d'observation de température pour le point testé. Nous pouvons comparer la sélection d'observations associée à la méthode *KFS* et celle mis en œuvre pendant *FASTEX*.

## Résultats

La figure (6.2-a.) donne l'estimation de  $\mathbf{h}_t \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$  pour chaque point testé. Il s'agit d'une figure composite où les 48 positions apparaissent et où la taille du symbole qui les signale

est fonction de l'amplitude de  $\mathbf{h}_t \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$ . On recherche le maximum de sensibilité, quel que soit son signe.

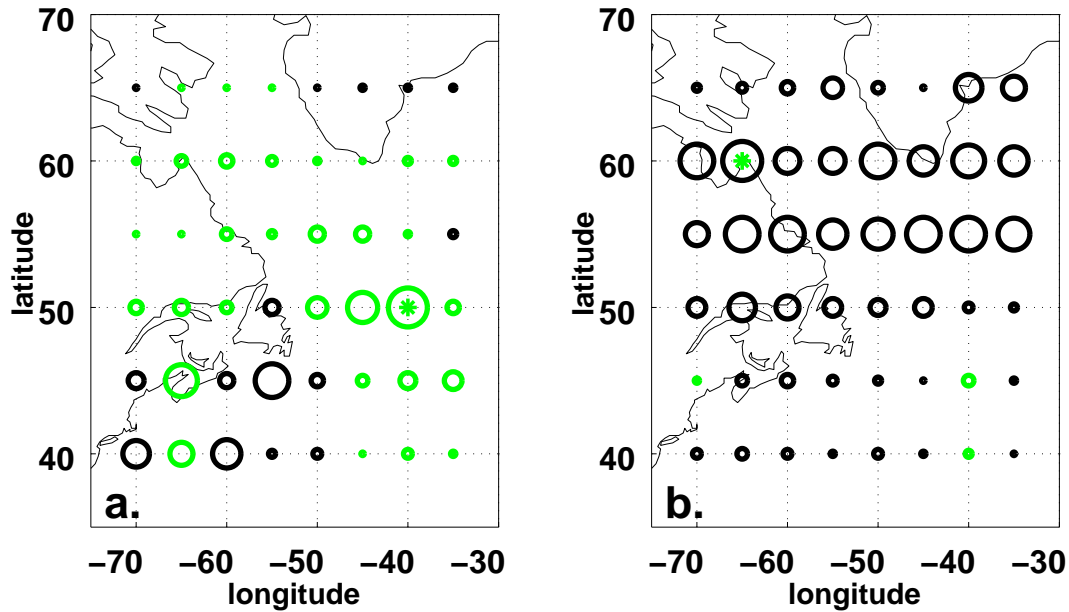


FIG. 6.2: Estimation de la position optimale d'une observation selon la stratégie I.

(a.) : Évaluation du critère de type FASTEX sur  $\nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$ , en chaque point d'une observation ciblée potentielle ( $\mathbf{h}_t \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$ ).

(b.) : Évaluation selon la méthode KFS.

La taille du symbole donne l'amplitude du critère correspondant, le grisé indique les valeurs négatives, le noir les valeurs positives. La position correspondant au maximum d'amplitude du critère est signalée par une étoile.

La figure (6.2-b.) donne le résultat de la première itération de l'algorithme par la méthode KFS. En chaque point testé, nous avons représenté la valeur du critère  $\Delta \text{Var}(\mathcal{S})$  avec un symbole dont la taille en donne l'amplitude. Dans ce cas, l'estimation du critère devrait toujours produire une valeur positive, puisque l'ajout d'une observation supplémentaire réduit cette variance, par construction. Si l'algorithme d'assimilation est optimal lui-même, l'introduction d'une information supplémentaire injecte de l'information et quelle que soit la qualité de l'observation, cela réduit cette variance.

Cependant, les valeurs négatives qui apparaissent pour les points testés à 40° Ouest et pour les latitudes 40 et 45 respectivement (sur la figure 6.2-b.) correspondent à des positions où l'apport d'une observation supplémentaire a un effet négligeable sur la réduction de  $\text{Var}(\mathcal{S})$ . Ces cas montrent les limites de l'approche quand la réduction de variance est très faible. Comme nous estimons  $\Delta \text{Var}(\mathcal{S})$  en effectuant la différence entre les termes de (6.3b) et (6.3a) selon l'équation (6.4b), ce sont des petites inexactitudes de la méthode adjointe (difficultés de l'algorithme 3D-Var à bien identifier l'observation rajoutée, imprécision dans l'estimation de  $\mathbf{A}$ ) qui provoquent ces faibles valeurs négatives là où le bénéfice de l'addition

d'une observation isolée est négligeable. Mais pour sélectionner une localisation optimale, sur la figure (6.2-b.), on recherche le maximum de réduction de  $Var(\mathcal{S})$ , c'est-à-dire les plus fortes valeurs positives.

On note, en comparant les figures (6.2-a.) et (6.2-b.) que la position du maximum est très différente selon le critère utilisé. On évalue à plus de  $1950\text{ km}$ , la distance entre les deux maxima des figures (6.2-a.) et (6.2-b.). D'où l'intérêt d'ainsi prendre en compte l'algorithme d'assimilation ainsi que l'erreur sur l'analyse issues des données conventionnelles seules, dans la cible à échantillonner. Selon la méthode *KFS*, l'observation sélectionnée est celle située au-dessus du continent canadien par  $60^\circ\text{Nord}$  et  $65^\circ\text{Ouest}$ . Pour ce cas (réseau secondaire d'observation; 17 février à 18h TU), les radiosondages du réseau conventionnel placé sur le continent canadien n'ont pas effectué de mesure, ce qui explique que l'on puisse avoir des fortes réductions de variance de  $\mathcal{S}$  au-dessus d'un continent. À cela se combine aussi le phénomène "d'hyper-sensibilité" en bordure de zone observée (cf. article inclus dans la partie 6.2 ainsi que les travaux de N. Baker (Baker et Daley, 2000)).

### Résultats de la seconde itération

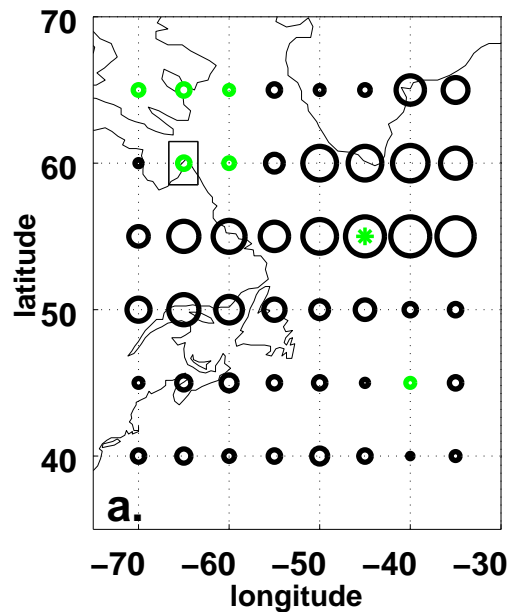


FIG. 6.3: Estimation de la position optimale pour la seconde observation (pour la stratégie I) par la méthode *KFS*. La taille du symbole donne l'amplitude de  $\Delta Var(\mathcal{S})$ , le grisé indique les valeurs négatives, le noir les valeurs positives. La position correspondant au maximum d'amplitude de  $\Delta Var(\mathcal{S})$  est signalée par une étoile. La position de l'observation sélectionnée en première itération par la méthode *KFS* est encadrée, pour mémoire.

Dans une seconde itération, nous avons testé la position d'une seconde observation de température sur la même grille que pour la première itération. Pour cela nous avons intégré l'observation sélectionnée par la méthode *KFS* en première itération (observation située à

60° Nord et 65° Ouest) dans le réseau conventionnel. La figure (6.3) représente le résultat avec la méthode *KFS* de cette seconde itération pour les observations de température testées à 600 *hPa*. L'observation qui semble donc avoir le plus d'effet en matière de réduction de la variance de  $\mathcal{S}$  dans la prévision est celle placée par 60° Nord et 40° Ouest, juste à l'est de la pointe sud du Groenland.

Bien que l'observation choisie en seconde itération de la méthode *KFS* soit plus proche de l'observation qui aurait été sélectionnée par la méthode de type FASTEX (cf. figure 6.2-a.) que celle déterminée en première itération de *KFS*, elle en reste encore très différente. En effet, presque 500 *km* de distance subsistent entre ces deux positions (FASTEX itération 1 et *KFS* itération 2).

De plus, on peut faire les mêmes remarques que précédemment concernant les valeurs négatives qui apparaissent sur la figure (6.3).

### Conclusion sur la première stratégie

La figure (6.4) montre les valeurs estimées de la variance de  $\mathcal{S}$  ( $\nabla_{x_0} \mathcal{J}^T \mathbf{A} \nabla_{x_0} \mathcal{J}$  est la mesure des erreurs d'estimation de l'aspect de la prévision  $\mathcal{J}$ ). La première barre correspond au cas où seules les observations conventionnelles sont utilisées. Le seconde barre montre la valeur de variance réduite par l'ajout de l'observation que nous avons sélectionnée lors de la première itération. Enfin, la troisième expérience montre l'effet de l'ajout de deux observations (comparée à la première colonne) en sus des observations conventionnelles. On note qu'il apparaît assez naturellement que l'ajout d'une seconde observation fait moins diminuer la variance que l'ajout de la première observation.

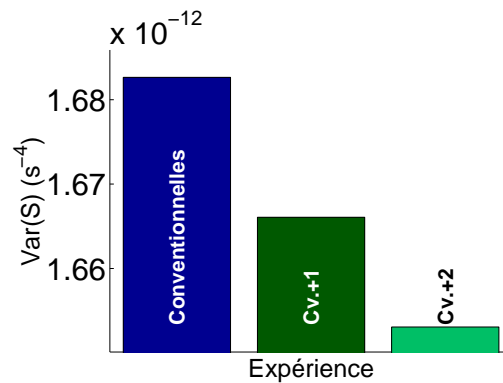


FIG. 6.4: Estimations de  $Var(\mathcal{S})$  pour les trois réseaux d'observation testés avec la stratégie sub-optimale I. On compare la valeur de  $Var(\mathcal{S})$  lorsque seules les observations **Conventionnelles** (colonne 1) sont utilisées (point de départ du processus itératif avec la méthode *KFS*), au cas où on a rajouté l'observation de température du point 60° N, 65° O à ce réseau (colonne centrale notée **Cv.+1**) et au cas où la seconde observation (point 55° N, 45° O, **Cv.+2**, colonne de droite) est aussi incluse dans les réseaux.

On imagine que sur cette grille de 48 positions potentielles un phénomène de saturation de critère de sélection devrait apparaître assez vite avec les itérations. Il faudra alors élargir

la gamme des points à tester : évaluer le potentiel d'autres niveaux verticaux et d'autres paramètres que la température. On permettrait ainsi une décroissance plus longue et plus constante de la variance de  $Var(\mathcal{S})$ .

Cependant, cette approche ne considère pas les contraintes de la mise en œuvre réelle du déploiement ainsi déterminé. En effet, dans le cas présent il y a 1400 *km* de distance entre les 2 positions issues des deux itérations de l'algorithme. Cette distance apparaît longue si elle doit être franchie par un avion au cours d'un vol de ciblage unique.

Par ailleurs, à chaque itération et pour chaque observation unique testée, il faut effectuer une assimilation 3D-Var avec le calcul des vecteurs de *mise à jour* (cf. chapitre 3) pour calculer  $\mathbf{A}_{ct}$ . C'est un coût numérique élevé pour un déploiement qui ne prend pas en compte la faisabilité réelle du déploiement et donc parfois difficile à mettre en œuvre (plan de vol considérant l'autonomie de l'avion, par exemple).

Enfin, pour un nombre  $p_t$  d'observations adaptatives déployées avec cette approche, il faut avoir conscience que leur répartition spatiale résultant de cette stratégie **I** *sub-optimale* est différente de celle qui serait obtenue en plaçant ces  $p_t$  observations en une seule itération d'une approche qui reste malheureusement hors de notre portée.

Le même constat ressort de l'étude menée par F. Rabier *et al.* (2001), sur la présélection d'un jeu réduit des canaux les plus informatifs de l'instrument IASI (qui sera embarqué sur le satellite METOP). En effet, une technique équivalente à celle présentée dans cette partie est testée pour déterminer itérativement un choix de 300 canaux parmi les 8461 que le sondeur (interféromètre) pourra fournir en chaque point de mesure. Comparée à d'autres méthodes, celle-ci y donne de bons résultats.

Un parallèle intéressant peut donc être effectué ici entre une technique de ciblage sur le mode de la localisation géographique des observations qui doivent permettre une amélioration de la prévision et le "ciblage" de la gamme la plus informative des canaux (limités au nombre de 300) au sein d'un spectre de mesures (radiances) qui en compte plusieurs milliers.

### 6.3.3 Tests de déploiements alternatifs

#### Confrontation de plans de vols préétablis

La détermination du déploiement sub-optimal peut aussi s'effectuer par discrimination entre des plans de vols préétablis. L'inconnue à déterminer par cette stratégie (notée stratégie **II** dans la suite de cette partie) n'est que la répartition spatiale d'observations parmi celles choisies au préalable (le nombre et la nature des observations sont fixés).

Il faut donc assimiler simultanément réseau conventionnel simulé et vol de ciblage potentiel afin d'estimer la valeur du critère de sélection correspondant à ce déploiement. Le plan de vol qui sera sélectionné sera celui qui apportera le plus de satisfaction vis-à-vis de ce critère.

La seconde stratégie est en fait utilisée par d'autres techniques de ciblage comme l'*Ensemble Transform* (Bishop et Toth, 1999) ainsi que l'*Ensemble Transform Kalman Filter* (Bishop *et al.*, 2001) qui ne définissent pas de cible au sens propre mais évaluent le potentiel de différents vols

de ciblage. De plus, la méthode de l'*Ensemble Transform Kalman Filter* prend en compte, comme la stratégie **II** avec la méthode *Kalman Filter Sensitivity*, l'influence de l'algorithme d'assimilation dans son évaluation de déploiements potentiels d'observations ciblées.

### Mise en œuvre de cette stratégie

Dans cette partie, nous résumons quelques résultats dans lesquels nous testons la potentialité d'un déploiement adaptatif à avoir une influence conséquente sur la prévision. Nous utilisons le cas de la POI18 correspondant au premier vol du **G-IV**, le 22 février à 12h TU. L'échéance de la prévision qui suit est de 24 heures. Il s'agit de simuler des déploiements adaptatifs alternatifs et de tester la potentialité de chacun d'eux selon la méthode *Kalman Filter Sensitivity*.

Comme cela a été montré dans l'article de Bergot T. et Doerenbecher A., 2002 (cf. partie 6.2), cette méthode peut se baser sur le vecteur  $\mathbf{c}_c = \mathbf{A}_c \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$  dans le cas où la longueur caractéristique du champ de sensibilité est beaucoup plus faible que les portées utilisées par le système d'assimilation. Le vecteur  $\mathbf{c}_c$  permet d'estimer une structure sensible qui tienne compte de l'algorithme d'assimilation 3D-Var et de la présence des observations conventionnelles.

Comme dans la stratégie précédente, nous utilisons la direction instable donnée par  $\nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$  pour calculer  $\mathbf{c}_c$ . Pour ce cas, nous avons choisi comme fonction  $\mathcal{J}$ , l'entrophie sur le domaine d'intérêt présenté dans la partie sur la POI18 (chapitre 5, partie 5.2).

Le calcul de l'équation (6.3a) est la première étape qui nécessite l'assimilation des observations du réseau conventionnel simulé, afin d'avoir une estimation de  $\mathbf{A}_c$ . Pour ce faire, nous avons directement utilisé les données réelles de ce réseau à la place de données simulées, comme précédemment.

Pour la seconde étape (calcul de l'équation (6.3b)), nous avons généré les données observées par les déploiements alternatifs en interpolant la réanalyse 4D-Var de la période FASTEX (cf. site web de la campagne FASTEX), plutôt que d'utiliser l'ébauche en introduisant un bruit gaussien pour produire des écarts à l'ébauche consistants. Là encore, la valeur des mesures n'intervient pas pour le calcul de  $Var(\mathcal{S}_{ct})$  (cf. équation 6.3b). Comme on a pu le montrer aux cours des validations dans le chapitre 3, seuls les opérateurs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{R}_{ct}$  importent réellement pour ce calcul.

### Les vols testés

Nous présentons dans les figures (6.5) à (6.9), les divers plans de vol que nous avons formulés à l'examen du vecteur  $\mathbf{c}_c$  ( $\mathbf{c}_c = \mathbf{A}_c \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$ ). Nous faisons l'hypothèse que ces déploiements utilisent des dropsondes dont la qualité de mesure est équivalente à celle utilisée durant la campagne FASTEX. Puisque le déploiement effectif du **G-IV** pour ce cas comporte 25 dropsondes et qu'environ 320 données de température ainsi que 320 données de vent sont

utilisées, nous avons choisi de dimensionner les déploiements simulés avec un nombre équivalent de mesures.

Nous avons simulé des dropsondes qui mesurent chacune 14 observations de température et 14 observations de vent régulièrement réparties sur la verticale, entre 300  $hPa$  et 950  $hPa$ , tous les 50  $hPa$ . Afin d'évaluer la robustesse de notre approche, nous avons aussi simulé le déploiement réel du **G-IV** en plaçant une dropsonde générée comme décrit auparavant, à chaque point de lâché des 25 dropsondes réelles (cf. figure 6.5).

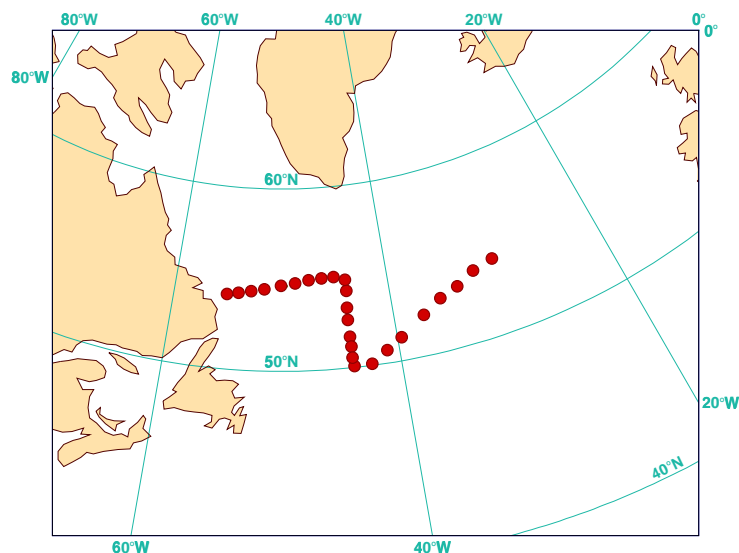


FIG. 6.5: Déploiement de 25 dropsondes selon le plan de vol du **G-IV**. Nom de l'expérience: **Sim-GIV**.

Comme nous souhaitions aussi tester en plus, l'effet de la densité des sondes et le nombre d'observations utilisées, nous avons aussi simulé des déploiements équivalents (pour l'extension du plan de vol) avec seulement 17 dropsondes. La figure (6.6) donne ainsi la localisation de 17 dropsondes extraites du plan de vol original du **G-IV** qui en compte 25. Ce sont dans les zones où la densité des sondes est très élevée que nous avons procédé à l'éclaircissage de ce déploiement.

La figure (6.7) présente un déploiement selon une grille régulière à maille lâche qui échantillonne ainsi les larges structures de  $c_c$  dans leur ensemble. Les points sont séparés de 5° en latitude et de 10° en longitude.

La figure (6.8) montre un autre déploiement selon une grille régulière, mais dont la résolution (5°) est plus fine en longitude que dans le cas de la grande maille de la figure (6.7).

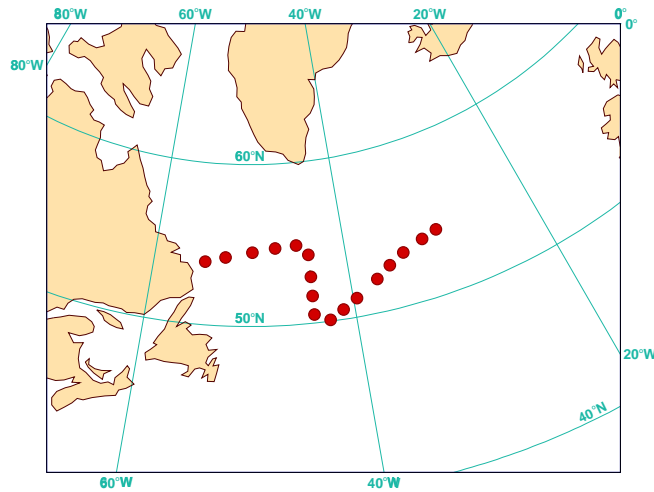


FIG. 6.6: Déploiement de 17 dropsondes extraites du plan de vol du **G-IV**, expérience notée **SZ**. On teste ainsi le nombre et la densité des sondes (on a retiré des sondes où elles étaient les plus densément réparties) par comparaison aux déploiements donnés dans les figures (6.5), (6.9) et (6.10).

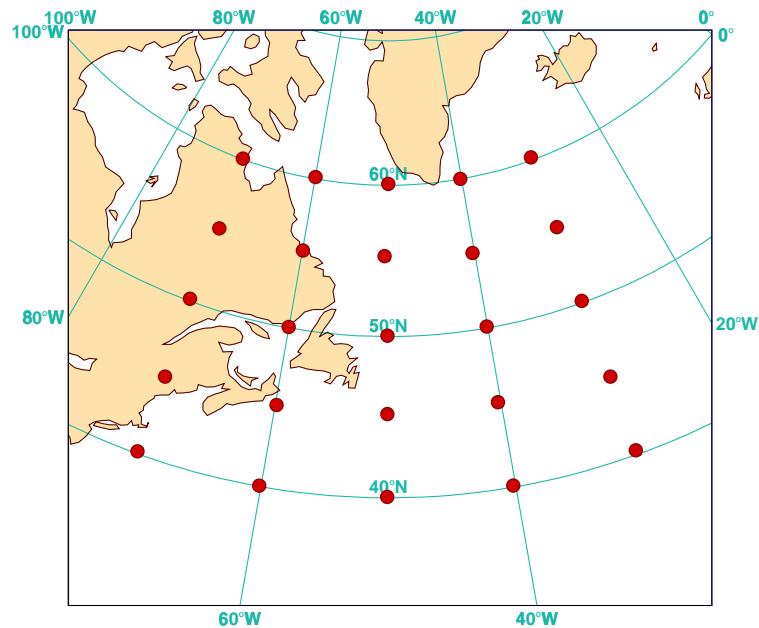


FIG. 6.7: Déploiement de 25 dropsondes selon une grille régulière à larges mailles rectangulaires:  $5^\circ$  de latitude et  $10^\circ$  en longitude (expérience notée **BS**).

La figure (6.9) donne les positions des sondes pour un déploiement de type vol, mais dont les dimensions spatiales sont plus grandes que celles du vol réel du **G-IV** du fait des grandes échelles de  $c_c$ . On peut remarquer que la longueur de ce déploiement atteint presque  $7000 \text{ km}$ , contre  $2500 \text{ km}$  environ pour le vol effectué par le **G-IV**.

La figure (6.10) présente une restriction du plan de vol précédent (figure 6.9) à seulement



17 de ses dropsondes. Les 8 dropsondes supprimées ont été retirées des premier et dernier segments afin d'y réduire la densité (le second segment n'a pas été modifié). Ce vol devra être comparé aux résultats obtenus avec le même plan de vol mais avec 25 sondes (figure 6.9) et les plans de vols issus du **G-IV** avec 17 sondes (figure 6.6) et 25 sondes (figure 6.5), respectivement.

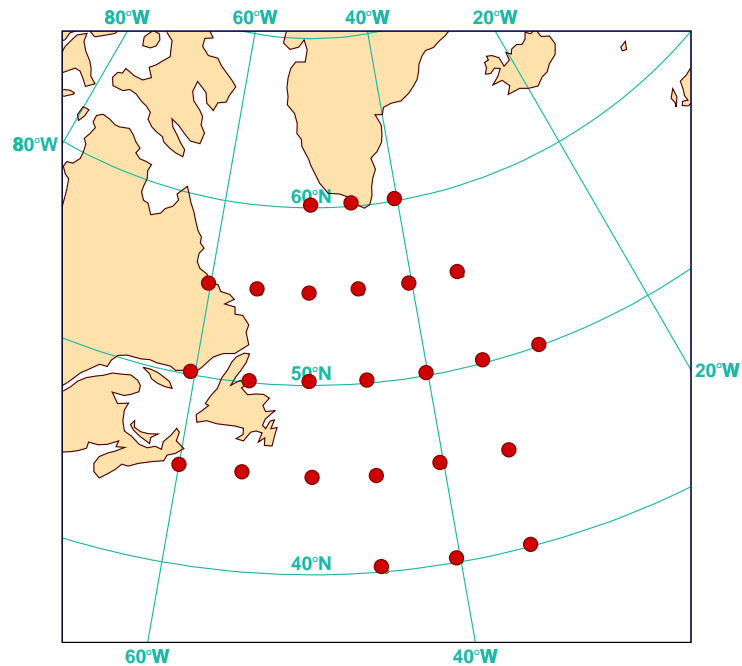


FIG. 6.8: Déploiement de 25 dropsondes selon une grille régulière dont la maille est de 5° de côté (expérience notée **IS**).

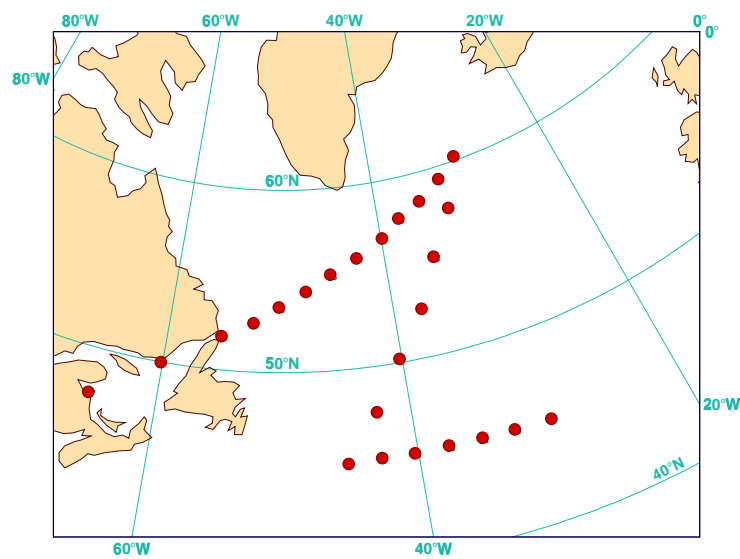


FIG. 6.9: Déploiement de 25 dropsondes selon un plan de vol alternatif à celui du **G-IV** (expérience **BZ**).

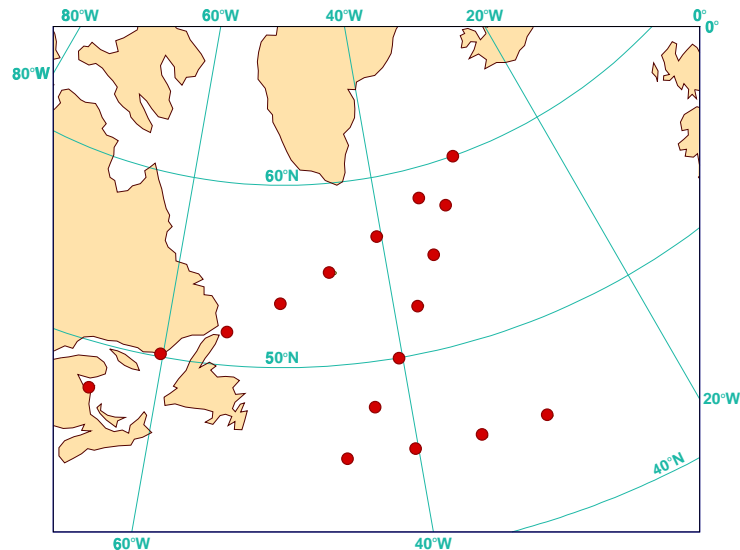


FIG. 6.10: Déploiement de 17 dropsondes selon un plan de vol alternatif à celui du **G-IV**. Le trajet est le même que celui du déploiement présenté dans la figure (6.9) mais le nombre de sondes a été réduit afin de tester l'effet de cette diminution.

Le dernier déploiement (figure 6.11) testé est un échantillonnage de 25 sondes réparties en boucle avec les points de départ et d'arrivée à St-Johns (Terre-Neuve). La densité des sondes est assez élevée. Les sondes de ce déploiement sont cependant moins densément réparties que dans le cas de l'expérience **Sim-GIV** utilisant le déploiement du **G-IV**.

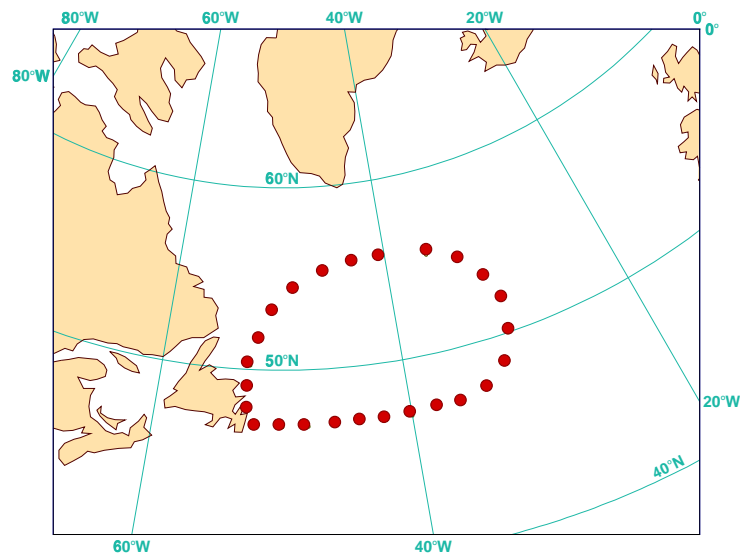


FIG. 6.11: Déploiement de 25 dropsondes selon un plan de vol en boucle alternatif à celui du **G-IV** (expérience **II**).

Le tableau (6.1) récapitule les différentes expériences qui ont été réalisées. Les observations conventionnelles (notées **Cv.**) sont présentes dans tous les cas. Nous avons simulé 2 grilles

régulières (**BS** et **IS**) et utilisé trois vols dont le déploiement original du **G-IV** (**Sim-G-IV**), un autre vol assez proche, mais plus grand (**BZ**) et un vol en boucle au départ de  $S^t$ -Johns.

Expérience	Jeu d'observations	Figure correspondante
<b>Cv.</b>	Observations conventionnelles	
<b>Cv.+BS</b>	Conventionnelles et simulation de la grande grille	(6.7)
<b>Cv.+G-IV</b>	Conventionnelles et <b>G-IV</b> réelles	
<b>Cv.+IS</b>	Conventionnelles et simulation de la grille <b>IS</b>	(6.8)
<b>Cv.+Sim-G-IV</b>	Conventionnelles et simulation du vol <b>G-IV</b>	(6.5)
<b>Cv.+BZ</b>	Conventionnelles et simulation du grand vol <b>BZ</b>	(6.9)
<b>Cv.+IL</b>	Conventionnelles et simulation d'un vol en boucle	(6.11)
<b>Cv.+SZ</b>	Conventionnelles et simulation de 17 sondes du <b>G-IV</b>	(6.6)
<b>Cv.+IZ</b>	Conventionnelles et simulation d'un vol long à 17 sondes	(6.10)

TAB. 6.1: Jeux d'observations utilisés dans les expériences sur le cas de la POI18, dans la mise en œuvre de la seconde stratégie de détermination de déploiements sub-optimaux d'observations ciblées.

### Résultats de l'évaluation du critère $\Delta Var(\mathcal{S})$

Le tableau (6.2) regroupe les résultats du critère de réduction de variance de  $\mathcal{S}$  (cf. équation 6.1) pour les différents déploiements testés ainsi que pour le déploiement du **G-IV** réel.

Expérience	$Var(\mathcal{S})$	$\Delta Var(\mathcal{S})$
<b>Cv.</b>	$0.348 \times 10^{-12}$	0.0
<b>Cv.+BS</b>	$0.251 \times 10^{-12}$	$9.716 \times 10^{-14}$
<b>Cv.+SZ</b>	$0.213 \times 10^{-12}$	$1.356 \times 10^{-13}$
<b>Cv.+G-IV</b>	$0.204 \times 10^{-12}$	$1.442 \times 10^{-13}$
<b>Cv.+IZ</b>	$0.204 \times 10^{-12}$	$1.443 \times 10^{-13}$
<b>Cv.+IS</b>	$0.202 \times 10^{-12}$	$1.459 \times 10^{-13}$
<b>Cv.+Sim-G-IV</b>	$0.190 \times 10^{-12}$	$1.579 \times 10^{-13}$
<b>Cv.+BZ</b>	$0.189 \times 10^{-12}$	$1.591 \times 10^{-13}$
<b>Cv.+IL</b>	$0.172 \times 10^{-12}$	$1.759 \times 10^{-13}$

TAB. 6.2: Résultats sur le cas de la POI18, de la mise en œuvre de la seconde stratégie de détermination de déploiements sub-optimaux d'observations ciblées. La dernière colonne donne le critère  $\Delta Var(\mathcal{S})$  évalué grâce à la fonction  $\mathcal{J}$  entropique; unités :  $s^{-4}$ .

La figure (6.12) présente sous la forme d'un histogramme, les résultats obtenus dans le contexte pronostique pour les divers déploiements alternatifs décrits précédemment.

L'examen des résultats présentés dans le tableau (6.2) et la figure (6.12), permet de faire trois remarques importantes.

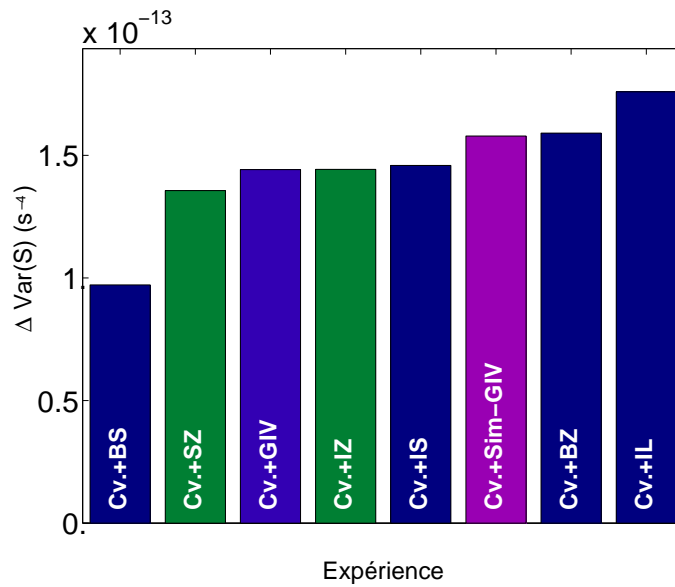


FIG. 6.12: Estimation de  $\Delta \text{Var}(S)$  pour divers déploiements adaptatifs alternatifs à celui du **G-IV** pour le 22 février à 12h TU. L'identification des déploiements est écrite sur chaque colonne de l'histogramme. La description du jeu d'observation correspondant est donnée dans le tableau (6.1). L'axe des ordonnées donne l'estimation de  $\Delta \text{Var}(S)$  avec la fonction  $\mathcal{J}$  enstrophie. Les expériences représentées en vert utilisent 17 dropsondes contre 25 pour les autres. L'utilisation d'observations réelles (conventionnelles et données du **G-IV**) sont représentées en bleu. Les déploiements simulés à 25 sondes sont en bleu marine et en magenta (cas de **Sim-G-IV**).

- Tout d'abord, la première remarque a trait au résultat du vol du **G-IV** réel par rapport aux autres déploiements et surtout par rapport aux résultats du vol simulé pour les mêmes points de lâcher (**Cv.+Sim-G-IV** - figure 6.5).

La comparaison entre le vol **G-IV** simulé (**Cv.+Sim-G-IV**) et le vol **G-IV** réel montre que les deux sont très équivalents, malgré le plus faible nombre d'observations réellement utilisées (environ 30 observations de températures en moins sur la totalité du vol, le nombre d'observation de vent est quasi identique). Bien qu'il y ait une légère différence de nombre d'observations, c'est surtout la répartition réelle des observations sur la verticale par rapport à la répartition régulière sur la verticale dans le cas simulé qui semble être responsable de cette légère différence. En effet, le vol réel est seulement de 8.5% moins efficace en terme de réduction de variance que le vol simulé. Ceci laisse présager que le vol simulé peut être une bonne estimation a priori de ce qui est réellement échantillonné.

Ce constat montre que la méthode *KFS* est robuste et peut être réellement mise en place avec une bonne anticipation des effets des déploiements. De plus la similitude des résultats obtenus pour ces deux déploiements simulé et réel, montre que la stratégie **II** que nous avons choisie pour simuler des déploiements en pronostic est cohérente en soi.

- En seconde remarque, il nous paraît important de souligner le résultat décevant de la grande grille (**Cv.+BS** - figure 6.7) en matière de réduction de la variance  $\mathcal{S}$  ( $\mathcal{S}$  est une mesure de l'erreur commise sur un aspect  $\mathcal{J}$  de prévision). Le fort écart entre les résultats obtenus avec les deux déploiements du type *grille* montre qu'une trop faible densité d'observation nuit à l'efficacité des observations ciblées. En effet, compte tenu des échelles des structures telles que  $\mathbf{c}_c (\mathbf{A}_c \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J})$  qui sont le reflet des portées présentes dans les statistiques d'erreur de l'ébauche, on aurait pu s'attendre à ce que la grande grille (**Cv.+BS** - figure 6.7) donne un bien meilleur résultat. On a notamment défini ce déploiement pour qu'il englobe au mieux la structure de  $\mathbf{c}_c$  sur toute la verticale de l'atmosphère.

La grille intermédiaire (**Cv.+IS** - figure 6.8) a un effet de réduction de variance bien supérieur par rapport à la grande grille qui se situe environ 33% en retrait par rapport à ce déploiement plus modeste.

Par ailleurs, le déploiement (**Cv.+Sim-G-IV**) est très dense et est plus optimal (a priori) pour échantillonner  $\nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$  que  $\mathbf{c}_c$ , mais il donne un résultat équivalent voire légèrement supérieur à celui de la grille intermédiaire (**Cv.+IS**) pour un même nombre de sondes. Le gain par rapport à la grande grille est de 38% environ. Ces bons résultats des déploiements basés sur le plan de vol du **G-IV** est une confirmation des études d'impact des dropsondes, effectuées après la campagne FASTEX. Cette cohérence est un argument supplémentaire en faveur du bon fonctionnement de cette seconde stratégie sub-optimale basée sur la méthode *KFS*.

Par ailleurs, le déploiement en grille régulière ne semble donc pas spécialement intéressant par rapport à des schémas de déploiements tels que les vols qui offrent plus de potentialités d'échantillonnage.

- La troisième remarque se réfère à l'importance du nombre et de la densité des observations, lorsque l'on compare des vols simulés identiques en trajectoire mais dont la densité de dropsonde est différente : c'est le cas de **Cv.+Sim-G-IV** et **Cv.+SZ** (figures 6.5 et 6.6) et de **Cv.+BZ** et **Cv.+IZ** (figures 6.9 et 6.10), avec 25 et 17 dropsondes respectivement. Pour ces cas au nombre de sondes réduits, l'effet de la réduction de variance est très nettement en retrait par rapport aux déploiements avec 25 sondes. Il est important de souligner que dans les deux cas de réduction de la densité des sondages (25 et 17 dropsondes) pour les plans des vols transatlantiques (plan du **G-IV** et plan **BZ**), la réduction de 32% des dropsondes génère une baisse d'efficacité de 14% et 9.3% pour le petit et le grand déploiement, respectivement. Cela signifie que l'on n'a pas encore atteint la saturation du critère de réduction de  $Var(\mathcal{S})$  avec la densité des 17 dropsondes employées. L'ajout de quelques sondes permet d'améliorer la variance de  $\mathcal{S}$ . Il reste à évaluer si ce gain est prohibitif par rapport au coût de ces sondages supplémentaires. Cela dépend aussi du seuil d'acceptabilité (seuil de risque) de la variance de l'erreur  $\mathcal{S}$ , commise sur l'aspect de la prévision  $\mathcal{J}$ , que l'on souhaite obtenir après avoir déployé les observations ciblées. On estime en effet que par ce phénomène de saturation, certaines *demandes* en matière de réduction de variance de  $\mathcal{S}$  peuvent être difficilement accessibles, même avec un réseau adaptatif très riche.

Cependant, le déploiement ( $\mathbf{Cv.} + \mathbf{BZ}$ ) qui s'avère relativement efficace n'est pas celui qui apporte le plus de satisfaction. En effet, le déploiement ( $\mathbf{Cv.} + \mathbf{IL}$  - figure 6.11) se détache très clairement du déploiement  $\mathbf{BZ}$  sur la figure (6.12). On relève encore un gain de près de 10% entre les deux. Ceci peut s'expliquer par le fait que le déploiement nommé  $\mathbf{IL}$  voit ses sondes réparties le long des valeurs extrêmes de  $\mathbf{c}_c$ , en suivant dorsales et thalweg de ce champ et tout en respectant une densité compatible avec l'algorithme d'assimilation. De plus, ce vol en boucle pourrait être réalisable par un seul avion, ce qui n'est pas le cas du plan de vol noté  $\mathbf{BZ}$ .

## 6.4 Éléments de conclusion sur l'approche pronostique

Dans cette étude pronostique, nous avons décrit dans un article (cf. partie 6.2), les éléments en jeu dans la difficile question de l'optimisation. Dans le cas du ciblage, l'optimisation est un concept qu'il nous a fallu éclairer et illustrer sur des exemples à dimension réduite, tant la solution du problème, posé dans son ensemble, reste conceptuellement ardue.

Ceci nous a conduit à proposer une nouvelle méthode de ciblage appelée *KFS*. Cependant, il est nécessaire de définir des contraintes supplémentaires qui nous permettent de fixer un certain nombre d'inconnues. Ces jeux de contraintes sont regroupés sous le terme de *stratégies* qu'il nous faut qualifier de *sub-optimales*, il est vrai.

Sur des cas de FASTEX, nous avons donc montré la faisabilité de deux de ces stratégies dans un cadre pronostique simulé. Les inconnues relatives au nombre d'observations, leur type et leur nature, sont autant de paramètres que nous fixons à l'avance. Ces contraintes nous donnent alors la possibilité de mettre en œuvre ces stratégies *sub-optimales* de détermination de déploiements adaptatifs.

Malgré les très fortes hypothèses réductrices du caractère optimal de l'approche pronostique que nous avons simulée sur des cas FASTEX, cette étude reste riche d'enseignements. En effet, au delà de la possible implémentation de telles stratégies, cette étude nous révèle leur capacité d'anticipation de la réalité. Dans le cas de la seconde stratégie pronostique que nous avons testée (discrimination entre des plans de vols) celle-ci donne une bonne estimation a priori de ce qu'il peut advenir dans la réalité une fois que le déploiement a été effectué. Ainsi, la comparaison entre les réductions de la variance de  $\mathcal{S}$  générées par le vol réel du **G-IV** et celui que nous avons simulé (expérience notée **Sim-G-IV**) laisse apparaître une différence de seulement 8.5%. Le faible écart entre les performances de ces deux vols est due à la répartition verticale différente des observations dans le vol réel par rapport au vol simulé. Ces différences de répartition sont le résultat de l'écrémage du 3D-Var qui a supprimé des paquets d'observations et généré des *trous* par la même occasion.

Par ailleurs, cette étude nous apprend l'étroit rapport qu'il existe entre le nombre d'observations et leur densité, vis-à-vis des caractéristiques du système d'assimilation des données.

S'il est clair que l'utilisation du vecteur  $\mathbf{c}_c = \mathbf{A}_c \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$  donne accès à une information très utile sur les cibles qu'il faut échantillonner (plutôt que  $\nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J}$  dans une stratégie FASTEX), la question de la *capture* des ces structures par l'échantillonnage reste cruciale. La variabilité de la réduction de  $Var(\mathcal{S})$  par les déploiements virtuels que nous avons testés en est une bonne illustration. Ainsi, les vols en boucle (vol noté **IL** dans les expériences de ce chapitre) ou en traversée de l'Atlantique (vol noté **BZ**) ont un gain sur le critère  $\Delta Var(\mathcal{S})$  bien plus appréciable que les grilles régulières. La grille régulière la plus large (maille de  $5^\circ$  en longitude et de  $10^\circ$  en latitude) est d'une dimension très importante qui enveloppe totalement la structure du champ  $\mathbf{c}_c$ , mais elle ne conduit qu'à une réduction de la variance assez faible de 28%. Les vols simulés identiques à ce qui avait pu être fait lors de FASTEX, font mieux avec plus de 45% de réduction et l'expérience notée **IL** atteint même plus de 50%. Il semble donc qu'il ne soit pas nécessaire d'envelopper totalement la structure de  $\mathbf{c}_c$  avec des sondes mais qu'il soit préférable de bien échantillonner les valeurs extrêmes de ces champs comme dans le cas du vol en boucle (expérience notée **IL**). Dans cette perspective, les déploiements de type vol (conçus pour des vecteurs de mesure tels que des avions ou des ballons stratosphériques) semblent offrir plus de potentialités que les grilles régulières (conçues pour des vecteurs de mesure tels que les plates-formes satellitaires).

Ainsi, la bonne qualité des observations requise pour ce genre de déploiements (de type vol), comme l'échantillonnage d'une large épaisseur d'atmosphère nous indique que les observations in situ et de bonne qualité, telles que des radiosondages restent un matériel privilégié pour le ciblage.





# Chapitre 7

## Conclusions et perspectives

- **Les leçons de FASTEX**

Suite à la campagne FASTEX, des études systématiques de l'impact sur la prévision des vols de ciblage ont été menées. Ces études ont montré une large variabilité de l'efficacité des observations adaptatives à améliorer la prévision, ainsi qu'une dépendance de cette efficacité à l'algorithme d'assimilation utilisé pour exploiter les observations ciblées (Langland *et al.*, 1999 ; Bergot *et al.*, 1999 ; Bergot, 2001).

De ce constat et de la conviction que certains déploiements de FASTEX pouvaient être améliorés a émergé l'idée d'un système d'observation adaptatif qui englobe aussi le processus d'assimilation pour lier directement l'observation et la prévision à améliorer. C'est en ce sens que l'on a souhaité formaliser de nouvelles techniques de ciblage qui soient plus *optimales*.

### **Formalisation d'un outil : la sensibilité aux observations**

La théorie de la sensibilité aux observations a pu être formalisée dans le cadre variationnel grâce à une collaboration avec F. Bouttier (communications personnelles). Cette approche combine la dynamique de la situation météorologique (calcul des zones sensibles issues du modèle adjoint, comme lors de la campagne FASTEX) avec les caractéristiques du processus d'assimilation qui exploite les données observées (dont les données ciblées). C'est la sensibilité d'un aspect de la prévision (caractérisé par une fonction coût  $\mathcal{J}$ ) aux observations. Ce calcul linéaire utilise l'adjoint du modèle de prévision et l'adjoint de l'opérateur d'assimilation.

La sensibilité aux observations se définit dans l'espace des observations et a la propriété de se décomposer pour des sous-parties de réseau d'observations. Ainsi, il est possible de ne se focaliser que sur la sensibilité aux observations ciblées. Cette séparation n'empêche pas que la sensibilité aux observations ciblées soit fonction non seulement de ces observations là mais aussi des observations conventionnelles qui leur sont contemporaines.

La sensibilité aux observations a été développée dans le cadre de l'assimilation 3D-Var de ARPEGE, le modèle opérationnel de Météo-France. Le choix du 3D-Var d'ARPEGE vient de notre volonté de travailler dans un cadre quasi opérationnel (en 1998-99) et de rester

ainsi dans la continuité des études menées sur le ciblage de FASTEX par ailleurs. Le développement de l'adjoint des processus d'assimilation dans ce cadre a nécessité une approche originale.

La clef de voûte de l'algorithme de calcul de la sensibilité aux observations est la détermination d'une partie de l'inverse de la Hessienne ( $\nabla\nabla J$ ) de la fonction objective du variationnel ( $J$ ). Non explicitement calculée dans les processus directs de l'assimilation, son estimation est pourtant indispensable. En effet, c'est cet opérateur qui intervient dans l'adjoint et qui contient le plus de caractéristiques du système d'assimilation employé.

L'opérateur correspondant (noté  $\mathbf{A}$ ), dont la bonne qualité est primordiale (au sens d'être représentatif des processus d'assimilation), a fait l'objet de soins tout particuliers au travers de nombreuses validations.

### Un algorithme nouveau : l'estimation de $\mathbf{A}$

Le calcul de l'inverse de la Hessienne (l'opérateur  $\mathbf{A}$  dans ce mémoire) utilise des vecteurs dits de *mise à jour*. Ces vecteurs sont représentatifs des fonctions de structure qui illustrent théoriquement les variances et covariances des erreurs dans l'état analysé mais qui traduisent surtout les effets du 3D-Var. Ainsi ces vecteurs donnent aussi des indications sur l'influence que peut avoir l'opérateur  $\mathbf{A}$  dans le calcul de la sensibilité aux observations. La validation de l'estimation de  $\mathbf{A}$  a mis en évidence les interactions complexes entre les paramètres du modèle et paramètres observés et entre les observations elles-mêmes.

Le nombre des vecteurs de *mise à jour* est le critère principal de qualité du calcul de sensibilité. Ce nombre de vecteurs a un impact immédiat sur le coût numérique de la méthode. De plus, l'adjoint de l'opérateur d'assimilation utilise les processus directs d'assimilation 3D-Var, à l'image du modèle adjoint de la prévision qui a besoin d'une estimation de la prévision non-linéaire. C'est au cours de ces processus directs du 3D-Var que sont déterminés les vecteurs de *mise à jour*. Les nombreux tests effectués nous ont montré qu'environ 300 vecteurs permettent d'estimer l'opérateur  $\mathbf{A}$  avec une erreur inférieure à 10%, voire 5% pour les réseaux secondaires.

Il est utile de rappeler que le contexte naturel de la sensibilité aux observations est diagnostique (c'est-à-dire une fois que les observations ont été effectuées), puisque la valeur des observations est nécessaire aux processus directs d'assimilation. Cependant, nous avons pu montrer que comme le prévoit la théorie, la détermination de la sensibilité aux observations ne dépend que de la distribution et des statistiques d'erreur des observations.

Par ailleurs, les tests numériques ainsi que la vérification des hypothèses simplificatrices que nous avons été amenés à poser, ont conforté la justesse de l'algorithme mis en place. Celui-ci s'est révélé en adéquation avec le cadre diagnostique d'une étude critique des déploiements de FASTEX.

- **Utilisation diagnostique de la sensibilité aux observations**

Dans ce mémoire de thèse, nous avons présenté deux emplois possibles pour la sensibilité aux observations dans un cadre diagnostique.

Sur la POI17 (chapitre 4) et la POI18 (chapitre 5), nous avons mis en évidence l'effet sur les zones sensibles, des fonctions de structure utilisées par l'algorithme d'assimilation. Ainsi, la répartition spatiale de la sensibilité entre les observations d'un déploiement adaptatif est très différente de celle qui peut être constatée dans une zone sensible définie uniquement avec l'adjoint de la prévision comme cela a été le cas durant FASTEX. L'étude du vecteur  $\mathbf{c} = \mathbf{A}\nabla_{\mathbf{x}_a}\mathcal{J}$  montre une partie prépondérante de la transformation des zones sensibles soumises à l'influence de l'opérateur adjoint d'assimilation, à la fois en échelles horizontales et verticales. On a ainsi pu mettre en évidence l'effet de portées (covariances intra-paramètre) et de balances géostrophiques (covariances inter-paramètres) qui sont caractéristiques de l'algorithme 3D-Var dans ce processus.

De plus, la sensibilité aux observations nous permet d'obtenir une estimation linéaire de l'efficacité de chaque observation. Pour ceci, nous avons utilisé une fonction  $\mathcal{J}_t$  définie comme le produit de la sensibilité et de l'écart de chaque observation avec l'ébauche. Les deux POI étudiées ont montré que cette efficacité résulte de complexes interactions entre les observations. Cette complexité permet de prendre conscience que l'optimisation d'un déploiement est une question très ardue.

Cependant, ces études ont clairement établi qu'une condition à l'efficacité d'une observation ciblée est que la sensibilité de la prévision à cette observation soit ou forte ou au moins modérée. Ce qui traduit un potentiel minimal de l'observation à influencer la prévision. Un écart à l'ébauche non négligeable est la seconde condition nécessaire à une forte contribution d'une observation dans la fonction  $\mathcal{J}_t$ .

Enfin, des phénomènes de compensation des contributions de différentes observations ciblées entre elles dans la fonction  $\mathcal{J}_t$  et au sein d'un même déploiement, résulte l'influence constatée finalement sur la prévision. Ces compensations montrent combien la conception de l'optimisation du ciblage peut se révéler complexe.

Sur la POI18, nous avons illustré l'utilisation qu'il pouvait être faite de la sensibilité aux observations afin de diagnostiquer certaines faiblesses du système d'assimilation. Ces faiblesses peuvent conduire à une détérioration significative de la prévision, dans certains cas, notamment si elles se traduisent par des erreurs au sein des zones sensibles. Nous avons mis en évidence comment les observations adaptatives du vol du **G-IV** de la POI18 ont corrigé les erreurs dans l'ébauche; mais surtout, comment les déficiences du système d'assimilation employé a conduit à une utilisation non-optimale de certaines observations ciblées.

On a illustré ce phénomène avec l'exemple des sondes du **G-IV** qui ont été lâchées au-dessus de la banquise canadienne. La banquise est responsable d'une inversion du gradient vertical de température en basse couche. Cette inversion est absente de l'ébauche qui ne

gère pas la banquise. Ceci génère de forts écarts entre l'ébauche et les observations qui se traduisent par le rejet de très nombreuses observations à l'écrouissage, dans une zone où ces observations auraient été particulièrement utiles. Par ailleurs, la comparaison des valeurs de l'ébauche avec des observations de température de basse altitude situées sous la surface du modèle provoque un problème de sur-adiabatisme en basse couche dans le cas de la POI18. Ces phénomènes soulèvent la question de comment assimiler ces observations supplémentaires et de haute qualité vis-à-vis des autres observations conventionnelles.

En conséquence de ces études, il nous semble préférable pour un système adaptatif d'utiliser des observations de bonne qualité et en faible nombre, plutôt que de compenser par leur nombre, une qualité moindre des observations ciblées.

### • Vers une approche pronostique

Après nous être penchés sur l'étude critique du déploiement des observations ciblées de deux POI de FASTEX, nous nous sommes intéressés à l'épineux problème de l'optimisation du ciblage (chapitre 6).

Comme nous ne disposons plus d'observations de la réalité météorologique, il est impossible de déterminer l'efficacité d'un déploiement (au sens moyen), puisque les erreurs sont inconnues. Le concept de l'optimisation se focalise donc sur une estimation statistique de l'efficacité du ciblage, puisque les statistiques (au sens de variances) sont, au contraire, connues.

Notre étude n'aurait pu se passer d'expériences dans un contexte pronostique. En effet, c'est là le contexte naturel du ciblage des observations. FASTEX en a été la première réalisation. Quel que soit le degré d'optimisation de l'approche choisie pour cette mise en pratique, l'essence du ciblage des observations reste l'ajout d'observations afin d'obtenir une amélioration marquée de la prévision.

À la lumière des études diagnostiques que nous avons menées sur les cas FASTEX, on peut se fixer d'emblée un cadre caractérisé par un système d'assimilation de données et par l'effet sur la prévision que l'on souhaite mesurer, avant de pouvoir approfondir la question de l'optimisation de stratégies de déploiements d'observations adaptatives. Mais ce cadre que l'on s'est fixé a une conséquence intrinsèque sur la notion d'optimum du ciblage.

### Définir un optimum

Cerner le caractère optimal d'un déploiement d'observations dépend de très nombreuses hypothèses et contraintes. À la vue de la finalité possible en terme d'impact sociétal des prévisions météorologiques, ces hypothèses sont innombrables et pourraient prendre des formes très *intégrées*, au sens où elles considéreraient directement le gain social d'une bonne prévision (évitement de dégâts matériels par exemple). Ces aspects sont actuellement à l'étude dans le cadre de la planification de la future campagne de mesure THORPEX (site internet [http://www.nrlmry.navy.mil/~langland/THORPEX\\_document/THORPEX\\_plan.pdf](http://www.nrlmry.navy.mil/~langland/THORPEX_document/THORPEX_plan.pdf)).

Pour notre part, nous avons choisi d'utiliser des fonctions coûts "classiques", comme l'en-

strophie, de manière à garder une certaine cohérence avec les études menées sur FASTEX.

Loin d'accéder à une formulation très globale, la sensibilité aux observations, dans le cadre diagnostique, nous a mis sur la voie de l'utilité de l'adjoint du processus d'assimilation dans le cadre pronostique.

Dans les travaux présentés dans ce mémoire, certaines des contraintes posées implicitement sont que le système d'assimilation est le 3D-Var d'ARPEGE et que la mesure de l'effet des observations est la "réduction de la variance des erreurs de l'estimation de la fonction coût réelle".

De plus, les études diagnostiques des deux POI de FASTEX nous ont montré qu'il fallait aussi prendre en compte l'écart entre les observations et l'ébauche, c'est-à-dire les erreurs du modèle aux points des observations. Dans le chapitre 6, nous avons donc proposé une nouvelle approche, appelée *Kalman Filter Sensitivity* (Bergot et Doerenbecher, 2002) (méthode *KFS*) qui prend en compte à la fois le système d'assimilation, les sensibilités et les erreurs (au moins au sens statistique). Ceci nous a permis d'estimer la réduction de variance ( $\Delta Var(\mathcal{S})$ ) qui entre dans la formulation de stratégies *sub-optimales* de ciblage.

Cependant, le problème conceptuel de l'optimisation d'un réseau d'observations adaptatives reste trop difficile à résoudre en l'état (problèmes liés au déploiement des observations en particulier). Il faut donc introduire des hypothèses restrictives supplémentaires afin d'avoir la possibilité d'accéder à des solutions qu'il nous faut qualifier, dès lors, de *sub-optimales*. Ces contraintes se traduisent par le choix du nombre et de la nature des observations ainsi que leur répartition selon des dispositions préétablies.

Mais bien que *sub-optimales*, les approches suggérées dans le chapitre 6 montrent leur utilisation possible dans un contexte purement pronostique. Ainsi, nous avons pu simuler sur des cas de FASTEX, la stratégie (partie 6.3.3) qui discrimine entre différents plans de vols.

Cette étape nous a permis de valider notre approche, en vérifiant que le déploiement simulé du vol de ciblage du **G-IV** de la POI18, conduisait à une réduction de variance très proche de celle du vol réel. L'étude des différents déploiement virtuels sur le cas de la POI18 illustre aussi qu'un déploiement de type vol (largage de dropsondes par avion ou par des ballons stratosphériques ...) sont bien plus efficaces, à nombre d'observations identique, qu'un déploiement selon un quadrillage régulier (répartition systématique de données de type satellitaire). Ceci n'a été étudié que sur le cas de la POI18 et demande bien entendu à être confirmé sur d'autres cas.

Désormais, la question de savoir dans quelles situations utiliser le ciblage trouve sa réponse dans les nouvelles techniques mises en place depuis FASTEX. En effet, avec la technique nommée *Kalman Filter Sensitivity* nous bénéficions d'une estimation de la variance de  $\mathcal{S}$ . Il peut donc être défini un seuil de risque météorologique accepté, indexé sur cette variance de  $\mathcal{S}$  et au delà duquel le coût du ciblage est amorti.

### Le futur du ciblage : vers une optimisation

Malgré le caractère bloquant de la question de l'optimisation des déploiements d'observations, le concept d'optimisation ouvre un large champ d'investigations à la fois théoriques et expérimentales.

Ainsi les USA ont mis en place depuis FASTEX, des campagnes régulières de ciblage sur l'est de l'océan Pacifique afin d'améliorer la qualité des prévisions sur la côte ouest des USA, en matière de précipitations tout particulièrement. Ce sont les campagnes NORPEX puis WSRP (Toth *et al.*, 2000), qui depuis cette année utilisent une évolution de leur technique de ciblage avec l'*Ensemble Transform Kalman Filter* (Bishop *et al.*, 2001). Cette nouvelle approche tient en compte les aspects relatifs à l'assimilation des données.

La campagne THORPEX devrait voir se confronter les différentes techniques d'optimisation des réseaux d'observations, mises en place depuis FASTEX.

Enfin, la question de l'optimisation des réseaux d'observations ne s'applique pas seulement à des déploiements adaptatifs dans le cadre du ciblage. Ce concept d'optimisation peut aussi être employé dans le cas d'autres philosophies d'observation. En effet, le programme EUCOS (EUMETNET) cherche à optimiser le système d'observation in situ sur l'Europe et sur le proche Atlantique. Dans ce cas, l'approche est différente du ciblage, puisque le système d'assimilation est cyclé et qu'une grande partie du système d'observation est fixe, tout en tenant compte de l'apport de la télédétection. L'optimisation se fait sur une vaste région et dans la durée, sans considération de phénomènes météorologiques spécifiques.

Cette optimisation intervient d'abord dans une optique de réduction des coûts de l'observation in situ à l'échelle synoptique. Par ailleurs, une composante du réseau d'observation géré par ce programme EUCOS comporte une partie flexible avec les projets E-AMDAR et E-ASAP qui correspondent à l'activation, à la demande, de systèmes d'acquisition de données météorologiques depuis une flotte d'aéronefs commerciaux et de navires sélectionnés.

Les outils développés au cours de cette thèse (sensibilité aux observations et *Kalman Filter Sensitivity*) pourraient se révéler utiles pour essayer de gérer au mieux le déploiement de ces moyens de mesure à l'échelle européenne.

## Références bibliographiques

- Andersson, E., Fisher, M., Munro, R., et McNally, A. (2000). Diagnosis of background errors for radiances and other observable quantities in a variational data assimilation scheme and the explanation of a case of poor convergence. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 126 (565): 1455–1472.
- Arbogast, P. et Joly, A. (1998). Precursor identification of a cyclogenesis. *C. R. Acad. Sc. Paris/Earth and Planetary Sciences*, 326: 227–230.
- Aubert, J.-P. (1999). Étude du système d'observations adaptatives utilisé pendant FASTEX. Note de Travail de l'ENM n°656, Météo-France, Toulouse.
- Baker, N. L. et Daley, R. (2000). Observation and background adjoint sensitivity in the adaptive observation-targeting problem. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 126 (565): 1431–1454.
- Baleste, M.-C., Brunet, H., Mougél, A., Coiffier, J., Bourdette, N., et Bessemoulin, P. (2001). Les tempêtes exceptionnelles de Noël 1999. Phénomènes Remarquables n°7, Direction de la Production, Météo-France, Toulouse.
- Barkmeijer, J., Van Gijzen, M., et Bouttier, F. (1998). Singular vectors and estimates of the analysis-error covariance metric. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 124: 1695–1713.
- Bergot, T., Hello, G., Joly, A., et Malardel, S. (1999). Adaptive observations: a feasibility study. *Mon. Weather. Rev.*, 127: 743–765.
- Bergot, T. (1999). Adaptive observations during FASTEX: a systematic survey of upstream flights. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 125: 3271–3298.
- Bergot, T. (2001). Influence of assimilation scheme on the efficiency of adaptive observations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 127: 635–661.
- Bergot, T. et Doerenbecher, A. (2002). A study on the optimization of the deployment of targeted observations using adjoint-based methods. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, *in press*.
- Bishop, C. H., Etherton, B. J., et Majumdar, S. J. (2001). Adaptive sampling with the Ensemble Transform Kalman Filter. Part I: theoretical aspects. *Mon. Weather. Rev.*, 129: 420–436.

- Bishop, C. H. et Toth, Z. (1999). Ensemble transformation and adaptive observations. *Mon. Weather. Rev.*, 56: 1748–1565.
- Bouttier, F., Derber, J., et Fischer, M. (1997). The 1997 revision of the  $jb$  term in 3D/4D-Var. Technical Memorandum 238, ECMWF, Reading, UK.
- Brown, R. G. (1983). *Introduction to random signal analysis and Kalman filtering*. John Wiley & Sons, Inc.
- Buizza, R. et Palmer, T. N. (1995). The singular vector structure of the atmospheric global circulation. *J. Atmos. Sci.*, 52: 1434–1456.
- Cammas, J.-P., Pouponneau, B., Desroziers, G., Santurette, P., Joly, A., Arbogast, P., Mallet, I., Caniaux, G., et Mascart, P. (1999). FASTEX IOP17 cyclone: introductory synoptic study with field data. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 125: 3393–3414.
- Courtier, P., Freydier, C., Geleyn, J.-F., Rabier, F., et Rochas, M. (1991). The ARPEGE project at Météo-France. In *Workshop on numerical methods in atmospheric models*, volume 2, pages 193–231, Reading, UK. ECMWF.
- Courtier, P. (1997). Variational methods. *J. Meteorol. Soc. Japan*, 75 (1B): 211–218.
- Desroziers, G., Hello, G., et Thépaut, J.-N. (2002). A 4D-Var re-analysis of the FASTEX experiment. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, page under review.
- Doerenbecher, A. et Bergot, T. (2001). Sensitivity to observations applied to FASTEX cases. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 8 (6): 467–481.
- Donnadille, J. (2000). *Dynamique d'altitude dans un cas de cyclogenèse au nord du courant-jet polaire pendant FASTEX: Étude diagnostique et numérique*. Ph.d. thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier.
- Donnadille, J., Cammas, J.-P., Mascart, P., Lambert, D., et Gall, R. (2001). FASTEX IOP18: A very deep tropopause fold. I: Synoptic description and modelling. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 127 (577): 2247–2268.
- Errico, R. (1997). What is an adjoint model? *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 78: 2577–2591.
- Farrell, B. F. (1990). Small error dynamics and the predictability of atmospheric flows. *J. Atmos. Sci.*, 47 (20): 2409–2416.
- Fisher, M. et Courtier, P. (1995). Estimating the covariance matrices of analysis and forecast error in variational data assimilation. Technical Memorandum 220, ECMWF, Reading, UK.
- Gauthier, P. et Thépaut, J.-N. (2001). Impact of the digital filter as a weak constraint in the preoperational 4DVAR Assimilation System of Météo-France. *Mon. Weather. Rev.*, 129: 2089–2102.



- Gelaro, R., Langland, R. H., Rohaly, G. D., et Rosmond, T. E. (1999). An assessment of the singular vector approach to targeted observing using the FASTEX dataset. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 125 : 3299–3328.
- Giard, D. et Bazile, E. (2000). Implementation of a new assimilation scheme for soil and surface variables in a global NWP model. *Mon. Weather. Rev.*, 128 : 997–1015.
- Gilbert, J.-C. et Lemaréchal, C. (1989). Some numerical experiments with variable storage quasi-Newton algorithms. *Math. Prog.*, 25 (B) : 407–435.
- Hager, W. W. (1989). Updating the inverse of a matrix. *SIAM Review*, 31 (2) : 221–239.
- Jaswinski, A. H. (1970). *Stochastic processes and filtering theory.*, volume 64 of *Mathematics in Science and Ingeneering*. Academic Press.
- Joly, A., Browning, K. A., Bessemoulin, P., Cammas, J.-P., Caniaux, G., Chalon, J.-P., Clough, S. A., Dirks, R., Emanuel, K. A., Eymard, L., Gall, R., Hewson, T. D., Hildebrand, P. H., Jorgensen, D., Lalaurette, F., Langland, R. H., Lemaître, Y., Mascart, P., Moore, J. A., Persoon, P. O. G., Roux, F., Shapiro, M. A., Snyder, C., Toth, Z., et Wakimoto, R. M. (1999). Overview of the field phase of the Fronts and Atlantic Storm Track Experiment (FASTEX) project. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 125 : 3131–3164.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, March 1960 : 35–45.
- Lacarra, J.-F. et Talagrand, . (1988). Short range evolution of small perturbations in a barotropic model. *Tellus*, 40(A) : 81–95.
- Langland, R. H., Gelaro, R., Rohaly, G. D., et Shapiro, M. A. (1998). Targeted observations in FASTEX: Adjoint-based targeting procedures and data impact experiments in IOPs-17 and 18. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 125 : 3241–3270.
- Langland, R. H., Toth, Z., Gelaro, R., Szunyogh, I., Shapiro, M. A., Majumdar, S., Morss, R., Rohaly, G., Velden, C., Bond, N., et Bishop, C. (1999). The North Pacific EXperiment8 (Norpex-98): targeted observations for improved North American weather forecasts. *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 80 : 1363–1384.
- Le Dimet, F.-X., Navon, I. M., et Daescu, D. N. (2002). Second-order information in data assimilation. *Mon. Weather. Rev.*, 130 : 629–648.
- Le Dimet, F.-X. et Talagrand, O. (1986). Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects. *Tellus*, 38(A) : 97–110.
- Lemaréchal, C. (1989). *Méthodes numériques d'optimisation*. INRIA.
- Lorenc, A. C. (1986). Analysis method for numerical weather prediction. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 112 : 1177–1194.

- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20: 130–141.
- Lynch, P., Giard, D., et Ivanovici, V. (1997). Improving the efficiency of a Digital Filter scheme for diabatic Initialization. *Mon. Weather. Rev.*, 125: 1976–1982.
- Majumdar, S. J., Bishop, C. H., Etherton, B. J., Szunyogh, I., et Toth, Z. (2001). Can an Ensemble Transform Kalman Filter predict the reduction in forecast error variance produced by targeted observations? *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 127 (578): 2803–2820.
- Mallet, I., Arbogast, P., Baehr, C., Cammas, J.-P., et Mascart, P. (1999a). Effects of a low-level precursor and frontal stability on cyclogenesis during FASTEX IOP17. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 125: 3415–3437.
- Mallet, I., Cammas, J.-P., Mascart, P., et Bechtold, P. (1999b). Effects of cloud diabatic heating on the FASTEX cyclone (IOP17) early development. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 125: 3439–3467.
- Noilhan, J. et Planton, S. (1989). A simple parametrization of land surface processes for a meteorological model. *Mon. Weather. Rev.*, 117: 536–549.
- Palmer, T. N., Gelaro, G., Barkmeijer, J., et Buizza, R. (1998). Singular vectors, metrics, and adaptive observations. *J. Atmos. Sci.*, 55: 633–653.
- Rabier, F. et Courtier, P. (1992). Four-dimensional assimilation in the presence of baroclinic instability. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 118: 649–672.
- Rabier, F., Klinker, E., Courtier, P., et Hollingsworth, A. (1996). Sensitivity of forecast errors to initial conditions. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 122: 121–150.
- Rabier, F., Fourrié, N., Chafaï, D., et Prunet, P. (2001). Channel selection methods for Infrared Atmospheric Sounding Interferometer radiances. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 128 (581A): 1011–1028.
- Snyder, C. (1996). Summary of an informal workshop on adaptive observations and FASTEX. *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 77: 953–961.
- Szunyogh, I., Toth, Z., Morss, R. E., Majumdar, S. J., Etherton, B. J., et Bishop, C. H. (2000). The effect of targeted dropsonde observations during the 1999 Winter Storm Reconnaissance Program. *Mon. Weather. Rev.*, 128 (10): 3520–3537.
- Talagrand, O. (1997). Assimilation of observations, an introduction. *J. Meteorol. Soc. Japan*, 75 (1B): 191–209.
- Thépaut, J.-N. et Courtier, P. (1991). Four-dimensional variational data assimilation using the adjoint of a multilevel primitive-equation model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 117: 1225–1254.

- Thépaut, J.-N., Courtier, P., Belaud, G., et Lemaître, G. (1996). Dynamical structure functions in a four-dimensional variational assimilation: a case study. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 122 : 535–561.
- Toth, Z., Szunyogh, I., Majumdar, S., Morss, R., Etherton, B., Bishop, C., Lord, S., Ralph, M., Persson, O., et Pu, Z.-X. (2000). Targeted observations at NCEP: toward an operational implementation. In Society, A. M., editor, *Preprints of Fourth Symposium on Integrated Observing Systems*, pages 186–193, Long Beach, California.



# Annexe A

## Éléments de théorie

### A.1 Formulation de Sherman-Morrison-Woodbury

La formule de **Sherman-Morrison-Woodbury** donne l'inverse d'une matrice suite à une perturbation de faible rang de l'inverse de la matrice originale.

$$[\mathbf{U} - \mathbf{S}\mathbf{T}]^{-1} = \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{S})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{U}^{-1} \quad (\text{A.1})$$

$\mathbf{U}$  et  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{S})$  doivent être inversibles.

Dans notre cas :

- La matrice originale est  $\mathbf{B}$ .
- La perturbation de faible rang est  $\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}$ . Le rang est inférieur ou égal à  $p$ , la dimension du vecteur d'observation.
- Suite à la perturbation de faible rang de l'inverse de la matrice originale nous obtenons :  $\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}$
- Nous retrouvons alors la Hessienne de la fonction coût du variationnel ou  $\mathbf{A}^{-1}$ .

La formule de **Sherman-Morrison-Woodbury** donne donc l'inverse de cette Hessienne, soit ce que nous avons appelé  $\mathbf{A}$  dans la définition de la sensibilité aux observations.

Nous posons :

- $\mathbf{U} = \mathbf{B}^{-1}$
- $\mathbf{S} = -\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-\frac{T}{2}}$
- $\mathbf{T} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}$

On a ainsi  $\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H} = -\mathbf{S}\mathbf{S}^T$  ce qui revient à écrire une décomposition de cette matrice en un produit de deux matrices. Ici,  $\mathbf{R}$  est supposée diagonale et définie positive ( $\mathbf{R}^{-\frac{T}{2}} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}$ ).  $\mathbf{U}$  et  $(\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{S})$  sont donc bien inversibles.

L'équation (A.1) s'écrit alors :

$$\left[ \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H} \right]^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-\frac{T}{2}} \left( \mathbf{I} + \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-\frac{T}{2}} \right)^{-1} \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H} \mathbf{B}$$

En faisant entrer  $\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}^{-\frac{T}{2}}$  dans la matrice inverse principale on obtient :

$$\left[ \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \right]^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B}$$

qui n'est autre que l'équation (3.4).

Nous renvoyons le lecteur intéressé par de plus amples informations (complément de *Schur*, etc.) à la référence de Hager (Hager, 1989). Cette référence retrace un historique de cette formulation et cite différentes utilisations possibles de celle-ci pour solutionner des problèmes numériques bien identifiés.

## A.2 Minimisation et vecteurs de *mise à jour*

Dans le calcul de la sensibilité aux observations, il est nécessaire de disposer de  $\mathbf{A}$  sous la forme d'un opérateur qui puisse être appliqué au vecteur de sensibilité de la prévision à ses conditions initiales  $(\nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{J})$ . On obtient ainsi le vecteur  $\mathbf{c}$  qui représente une covariance entre les erreurs d'analyse et les variations de  $\mathcal{J}$  correspondantes (cf. partie 3.3.2 annexe B.1). La matrice  $\mathbf{A}$  n'est donc pas stockée dans le système de calcul numérique, ses dimensions ( $n \times n$ ) sont beaucoup trop grandes pour le permettre ( $n \geq 10^6$ ).

Nous supposons que

$$\mathbf{A} \simeq (\nabla \nabla J)^{-1} \quad (\text{A.2})$$

Nous cherchons en fait une estimation de  $\nabla \nabla J^{-1}$  en utilisant une décomposition en facteurs propres. Ce calcul numérique se fait en deux étapes successives :

La première étape consiste en la décomposition en facteurs propres de la Hessienne elle-même, en utilisant un algorithme de Lanczos dans le processus de minimisation de la fonction objective et quadratique  $J$ , grâce à un algorithme du gradient conjugué (Lemaréchal, 1989 ; Gilbert et Lemaréchal, 1989).

La seconde étape permet de déduire un certain nombre (noté  $l$  par la suite) de vecteurs dits de *mise à jour* de la précédente décomposition. Ces vecteurs permettent de modifier légèrement la matrice de variance-covariances des erreurs de l'ébauche dont est naturellement dérivée  $\mathbf{A}$ . De cette propriété découle l'écriture suivante :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T \quad (\text{A.3})$$

où les  $l$  colonnes de la matrice  $\mathbf{V}$  (matrice rectangulaire de dimension  $l \times n$ ) sont les  $l$  vecteurs de *mise à jour*. Cette dernière étape est basée sur l'application de la formule de **Shermann-Morrison-Woodbury** (cf. partie précédente et (Hager, 1989)).

### A.2.1 Étape 1 : L'algorithme de Lanczos

L'algorithme de Lanczos permet d'estimer la décomposition en facteurs propres d'un opérateur que nous allons noter  $\mathbf{G}$ . Il permet, au pire, d'isoler les premiers facteurs propres (valeurs propres les plus élevées). Lors de la  $l^e$  itération de l'algorithme, celui-ci génère une matrice rectangulaire  $\mathbf{Q}_l$  formée de  $l$  vecteurs orthonormés (de dimension  $n$ ) ainsi qu'une matrice tri-diagonale  $\mathbf{T}_l$  de dimension  $l$  qui satisfont la relation :

$$\boxed{\mathbf{G}\mathbf{Q}_l = \mathbf{Q}_l\mathbf{T}_l} \quad (\text{A.4})$$

Si nous notons  $\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$  la décomposition en facteurs propres de  $\mathbf{T}_l$ , tout en se rappelant que  $\mathbf{Q}_l\mathbf{Q}_l^T = \mathbf{I}_n$ , il peut être démontré de façon assez directe que les vecteurs définis par  $\mathbf{w}_i = \mathbf{Q}_l\mathbf{u}_i$ , où  $i = 1, \dots, l$  sont les vecteurs propres de  $\mathbf{G}$  associés aux valeurs propres  $\lambda_i$  (les vecteurs  $\mathbf{u}_i$  sont les colonnes de  $\mathbf{U}$ ).

Si  $\mathbf{G}$  est la Hessienne de  $J$  :

$$\nabla\nabla J \simeq \sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T \quad (\text{A.5})$$

La formule (A.5) ci-dessus est réarrangée selon

$$\boxed{\nabla\nabla J \simeq \mathbf{I} + \sum_{i=1}^l (\lambda_i - 1) \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T} \quad (\text{A.6})$$

La convergence des facteurs propres de  $\mathbf{G}$  (ou  $\nabla\nabla J$ ) ne nécessite pas la connaissance totale de la matrice. L'algorithme de Lanczos a cet avantage de n'avoir accès qu'au résultat de l'application successive (processus itératif) d'un opérateur sur un vecteur initial connu (point de départ de la minimisation).

Lors du calcul des facteurs propres de la Hessienne, les directions de descente successives (gradients ou dérivées premières de  $J$  par rapport à la variable de contrôle adimensionnée) de l'algorithme de gradient conjugué sont utilisées pour estimer une approximation de la dérivée seconde de  $J$ . À chaque étape de l'algorithme itératif, la nouvelle direction de recherche est orthogonalisée par rapport aux vecteurs propres qui ont convergé dans les étapes précédentes (cf. paragraphe (A.3) Gradient conjugué et algorithme de Lanczos).

Pour aider la convergence rapide de la minimisation du  $J$  incrémental (conditionnement des matrices), on effectue un changement de variable dans le modèle ARPEGE. On passe ainsi d'une variable dite "modèle" au sens physique, à une variable dite "de contrôle" adimensionnée (cf. équation (A.8) du changement de variable).

La variable de contrôle est notée  $\chi$  et est obtenue par application de la décomposition de  $\mathbf{B}$  selon :

$$\mathbf{B} = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}^{-T} \quad (\text{A.7a})$$

ou

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathcal{L}^T \mathcal{L} \quad (\text{A.7b})$$

On définit la variable de contrôle en posant :

$$\chi = \mathcal{L} \delta \mathbf{x} \quad (\text{A.8})$$

Ce changement de variable implique que dans l'espace de contrôle, la Hessienne de  $J$  (fonction de  $\chi$ ) s'écrive selon (A.9) :

$$\nabla\nabla J = \mathbf{I} + \mathcal{L}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathcal{L} \quad (\text{A.9})$$

L'information relative aux fonctions de structure (variance et covariances des erreurs de l'ébauche) ne sont donc plus présentes dans le  $J_b$  mais dans le  $J_o$ .

Dans la formulation d'ARPEGE que nous utilisons ici, l'algorithme de Lanczos n'intervient cependant pas dans une partie de l'algorithme variationnel où les variables sont adimensionnées. Or un tel algorithme standard est construit pour fonctionner avec des variables



définies dans un espace régit par le produit interne euclidien (homogénéité des paramètres de la variable). Ceci implique un nouveau changement de variable entre le vecteur d'état du modèle qui contient des grandeurs physiques bien distinctes (tourbillon, divergence, température, humidité spécifique et pression de surface) et un vecteur dont la dimension physique est homogène et qui sera utilisé dans l'algorithme de Lanczos. Le produit interne naturel défini sur le vecteur d'état modèle étant l'énergie totale, ce changement de variable est obtenu en pré-multipliant chaque paramètre du vecteur d'état par la racine carrée des coefficients de la norme  $\mathcal{E}$  (soit  $\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}$ , cf. équation 2.11). Comme on a  $[\mathcal{E}] = \frac{[Joules]}{[x]^2}$ , la dimension de  $[\mathcal{E}^{\frac{1}{2}} \cdot \delta \mathbf{x}] = [Joules]^{\frac{1}{2}}$ .

L'opération inverse est aisément réalisée pour recouvrir la dimension physique des paramètres des vecteurs propres isolés par l'algorithme de Lanczos.

### A.2.2 Étape 2 : le calcul des vecteurs de *mise à jour*

La seconde étape du calcul de l'opérateur  $\mathbf{A}$  consiste en la mise en forme des vecteurs dits de *mise à jour* de  $\mathbf{B}$ . Cette propriété entre  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  est formalisée par la relation de **Shermann-Morrison-Woodbury** (cf. partie A.1) qui est appliquée ici.

Notons  $\mathbf{s}_i = (\lambda_i - 1)^{1/2} \mathbf{w}_i$  et soit  $\mathbf{S}$  une matrice rectangulaire ( $l \times n$ ) dont les colonnes sont les vecteurs  $\mathbf{s}_i$ . Les vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont ceux de l'équation (A.6). Nous choisissons de noter  $\mathbf{I}_n$  la matrice identité de rang  $n$  et  $\mathbf{I}_l$  celle de rang  $l$ .

La décomposition en facteurs propres de la Hessienne  $\nabla \nabla J$  se trouve écrite selon la nouvelle forme suivante :

$$\nabla \nabla J \simeq \mathbf{I}_n + \sum_{i=1}^l \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T = \mathbf{I}_n + \mathbf{S} \mathbf{S}^T \quad (\text{A.10})$$

L'enjeu est alors d'estimer l'inverse de  $\nabla \nabla J$  (ie.  $\mathbf{A}$ ) à partir de cette décomposition. L'application de la formule de **Shermann-Morrison-Woodbury** mène à l'estimation suivante de  $\nabla \nabla J^{-1}$  :

$$\nabla \nabla J^{-1} = \mathbf{I}_n - \mathbf{S} (\mathbf{I}_l + \mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \quad (\text{A.11})$$

Un algorithme de "back substitution" permet de calculer la décomposition de Cholesky de  $(\mathbf{I}_l + \mathbf{S}^T \mathbf{S})$  dont l'inverse est aisément calculé du fait de la faible dimension  $l$  ( $l \ll n$ ). Soit  $\mathbf{U}^T \mathbf{U}$ , cette décomposition ( $\mathbf{U}$  est une matrice carrée de dimension  $l$ ). L'équation (A.11), par substitution, se réécrit sous la forme :

$$\nabla \nabla J^{-1} = \mathbf{I}_n - \mathbf{S} \mathbf{U}^{-1} (\mathbf{S} \mathbf{U}^{-1})^T \quad (\text{A.12})$$

Les colonnes de la matrice  $\mathbf{S} \mathbf{U}^{-1}$  (matrice carrée et de dimension  $n$ ) sont donc les vecteurs de *mise à jour* mais écrits dans l'espace de la variable de contrôle  $\chi$ . Il suffit alors d'appliquer l'opérateur  $\mathcal{L}^{-1}$  à ces derniers pour générer les vecteurs de *mise à jour* ( $\mathbf{v}_i$ , colonnes de  $\mathbf{V}$ ) définis dans l'espace de la variable modèle  $\mathbf{x}$ .

$$\nabla\nabla J^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T \quad (\text{A.13})$$

$\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{x}^a}\mathcal{J}$  est donc calculé en procédant à la succession des opérations suivantes.

- Projection de  $\mathbf{B}$  sur  $\nabla_{\mathbf{x}^a}\mathcal{J}$  qui revient à appliquer  $\mathcal{L}^{-T}$  puis  $\mathcal{L}^{-1}$  au vecteur  $\nabla_{\mathbf{x}^a}\mathcal{J}$
- Projection des vecteurs colonne de  $\mathbf{V}$  sur  $\nabla_{\mathbf{x}^a}\mathcal{J}$  ce qui génère les coefficients  $\alpha_i = \mathbf{v}_i^T(\nabla_{\mathbf{x}^a}\mathcal{J})$
- Combinaison linéaire des vecteurs colonne de  $\mathbf{V}$  avec les coefficients  $\alpha_i$  correspondants
- Différence entre  $\mathbf{B}\nabla_{\mathbf{x}^a}\mathcal{J}$  et  $\mathbf{V}\mathbf{V}^T\nabla_{\mathbf{x}^a}\mathcal{J}$

$$\boxed{\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{x}^a}\mathcal{J} \simeq (\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}^{-T})\nabla_{\mathbf{x}^a}\mathcal{J} - \left(\sum_{i=1}^l \alpha_i \cdot \mathbf{v}_i\right)} \quad (\text{A.14})$$

où  $\mathbf{B} = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}^{-T}$  et  $\alpha_i = \mathbf{v}_i^T(\nabla_{\mathbf{x}^a}\mathcal{J})$ .

la matrice de dimension  $(n \times n)$  et de rang  $l$ ,  $\mathbf{V}\mathbf{V}^T$  est alors une estimation de :

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{B}\mathbf{H}^T(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1}\mathbf{H}\mathbf{B} \quad (\text{A.15})$$

En nous référant à la partie A.1, il apparaît que la dimension  $l$  de *mise à jour* de  $\mathbf{B}$  peut être au maximum  $p$  qui est le rang de  $\mathbf{H}^T\mathbf{R}\mathbf{H}$ . Ceci impliquerait aussi que la meilleure estimation de  $\mathbf{A}$  nécessite  $p$  vecteurs  $\mathbf{v}_i$  de *mise à jour*. Le stockage de tous ces vecteurs deviendrait alors aussi coûteux que l'expression sous forme matricielle de  $\mathbf{H}$ . Dans la pratique, l'estimation de  $\mathbf{A}$  n'a pas ce degré de finesse. En effet, bon nombre d'observations n'ont qu'une faible influence sur l'analyse et sont à peine détectées par l'algorithme, car ne contribuant que faiblement au gradient de  $J_o$ , qui est la direction de convergence maximale du calcul de  $\mathbf{A}$ .

## A.3 Les algorithmes combinés de Lanczos et du gradient conjugué

Nous reprenons ici des explications données en annexe de (Fisher et Courtier, 1995). Nous y utilisons les mêmes notations que dans la source citée ci-dessus. Ces notations ne sont donc pas à mettre en rapport direct avec les notations utilisées dans le reste de ce document.

Soit la fonction quadratique suivante :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c \quad (\text{A.16})$$

Soient un point initial,  $\mathbf{x}_0$ , ainsi qu'une direction de descente initiale,  $\mathbf{d}_0$ . Le gradient conjugué qui permet de minimiser  $f$  est :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k \quad (\text{A.17a})$$

$$\mathbf{g}_{k+1} = -\nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) \quad (\text{A.17b})$$

$$\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{g}_{k+1} + \gamma_k \mathbf{d}_k \quad (\text{A.17c})$$

où  $\gamma_k = (\mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{g}_{k+1}) / (\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k)$  et  $\alpha_k$  est la valeur que prend  $\alpha$  qui donne le minimum de  $f$  le long de la direction  $\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k$ .

En éliminant terme à terme,  $\mathbf{d}_k$  et  $\mathbf{d}_{k+1}$  des équations (A.17) tout en se remémorant que

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = (\mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k) \quad (\text{A.18})$$

on peut montrer très directement que  $\mathbf{g}_k$  satisfait la récurrence à trois termes suivante :

$$\frac{1}{\alpha_{k+1}} \mathbf{g}_{k+2} + (\mathbf{M} - \delta_{k+1} \mathbf{I}) \mathbf{g}_{k+1} + \frac{\gamma_k}{\alpha_k} \mathbf{g}_k = 0 \quad (\text{A.19})$$

où  $\delta_{k+1} = (1/\alpha_{k+1}) + (\gamma_k/\alpha_k)$ .

Soit le vecteur  $\mathbf{q}_k = c_k \mathbf{g}_k$  avec  $c_k = (\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k)^{-1/2}$ . Celui-ci est orthonormé et satisfait la relation suivante :

$$\mathbf{M}\mathbf{q}_k = \beta_{k+1} \mathbf{q}_{k+1} + \delta_k \mathbf{q}_k + \beta_k \mathbf{q}_{k-1} \quad (\text{A.20})$$

où  $\beta_{k+1} = -c_k / (\alpha_k c_{k+1})$ . C'est précisément cette relation de récurrence qui est utilisée dans l'algorithme de Lanczos (matrice tri-diagonale  $\mathbf{T}$  de (A.4)) pour déterminer les facteurs propres de  $\mathbf{G}$  (A.4) (Buizza et Palmer, 1995).



## Annexe B

### Résultats complémentaires

#### B.1 Variance de la fonction coût et erreurs d'analyse.

Si nous considérons les variations de fonction coût  $\mathcal{J}$  générées par des variations dans l'état initial de la prévision (l'analyse, en l'occurrence) qui suivent la distribution statistique des erreurs d'estimation de cet état initial, la variance de ces perturbations de  $\mathcal{J}$ , notée  $\delta\mathcal{J}^t$  se calcule comme

$$Var(\delta\mathcal{J}^t) = \langle \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}; \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \rangle \quad (\text{B.1})$$

Cette variance est effective ou *véritable* si la matrice de variance-covariances des erreurs d'analyse (notée  $\mathbf{A}^t$  pour l'occasion) contient réellement les vraies variances et covariances des erreurs d'analyse. Dans ce cas,  $\mathbf{A}^t$  s'écrit :

$$\mathbf{A}^t = E((\zeta^a)^2) - (E(\zeta^a))^2 \quad (\text{B.2})$$

avec  $\zeta^a = (\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t)$  qui représente l'erreur commise sur l'estimation de l'analyse ( $\mathbf{x}^a$  étant non biaisée, le second membre de l'équation (B.2) est nul). Si  $\Delta\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathbf{x}^f) - \mathcal{J}(\mathbf{x}^t)$  est l'estimation non-linéaire de cette variation de  $\mathcal{J}$ , on peut aussi estimer au premier ordre et par définition du gradient aux conditions initiales que  $\delta\mathcal{J}^t = \langle \zeta^a; \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \rangle$ .

Comme on peut écrire  $\delta\mathcal{J}^t = (\zeta^a)^T \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$  et que  $\delta\mathcal{J}^t$  est considéré non biaisé ( $E(\mathcal{J}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}^t)$ ) car la prévision est considérée comme telle, on peut écrire :

$$Var(\delta\mathcal{J}^t) = E[\delta\mathcal{J}(\delta\mathcal{J})^T] \quad (\text{B.3})$$

$$= E[(\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J})^T \zeta^a (\zeta^a)^T \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}] \quad (\text{B.4})$$

$$= (\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J})^T E((\zeta^a)^2) \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \quad (\text{B.5})$$

$$= (\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J})^T \mathbf{A}^t \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J} \quad (\text{B.6})$$

## B.2 Vecteurs de *mise à jour* et observations ciblées

Dans cette annexe qui complète la partie sur la validation de  $\mathbf{A}$  (cf. partie 3.4.2), nous illustrons le fait que les premiers vecteurs de *mise à jour* reflètent l'effet des observations ciblées.

Nous nous plaçons dans le cas particulier de la figure (3.15) et considérons l'expérience où l'écart type d'erreur des observations ciblées est quatre fois plus faible que l'écart type utilisé dans l'assimilation standard de ces données. C'est le cas du 22 février 1997 à 12h TU, la fonction coût utilisée est l'entrophie à 24 heures d'échéance. la zone d'intérêt est positionnée sur les figures (5.2-a.) et (5.2-b.).

Il y a plusieurs raisons pour expliquer la rapide décroissance des valeurs de  $Var(\delta\mathcal{J}) = \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}_0^T \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}_0$  avec les premiers vecteurs de *mise à jour*.

Tout d'abord, il faut que ces vecteurs soient co-localisés avec la structure sensible ( $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ ) et que leur projection dans cette direction ne soit pas nulle. Ensuite, les observations ciblées sont elles-mêmes situées dans cette zone sensible. Enfin, comme nous avons diminué les variances contenues dans la matrice  $\mathbf{R}_t$ , ces observations ont un plus fort poids (que sans modification de  $\sigma_o$  et que les observations conventionnelles) dans le  $J_o$  de la fonction objective du variationnel (cf. équation 2.79). Elle contribuent ainsi plus aux premières directions de descente de l'algorithme de minimisation et correspondent donc aux premiers vecteurs déterminés.

Afin de mettre en évidence ces caractéristiques des premiers vecteurs de *mise à jour*, nous montrons successivement les structures instables ( $\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$ ), le vecteur numéro **5** et le vecteur numéro **200** dans les figures suivantes.

## B.2.1 La structure instable

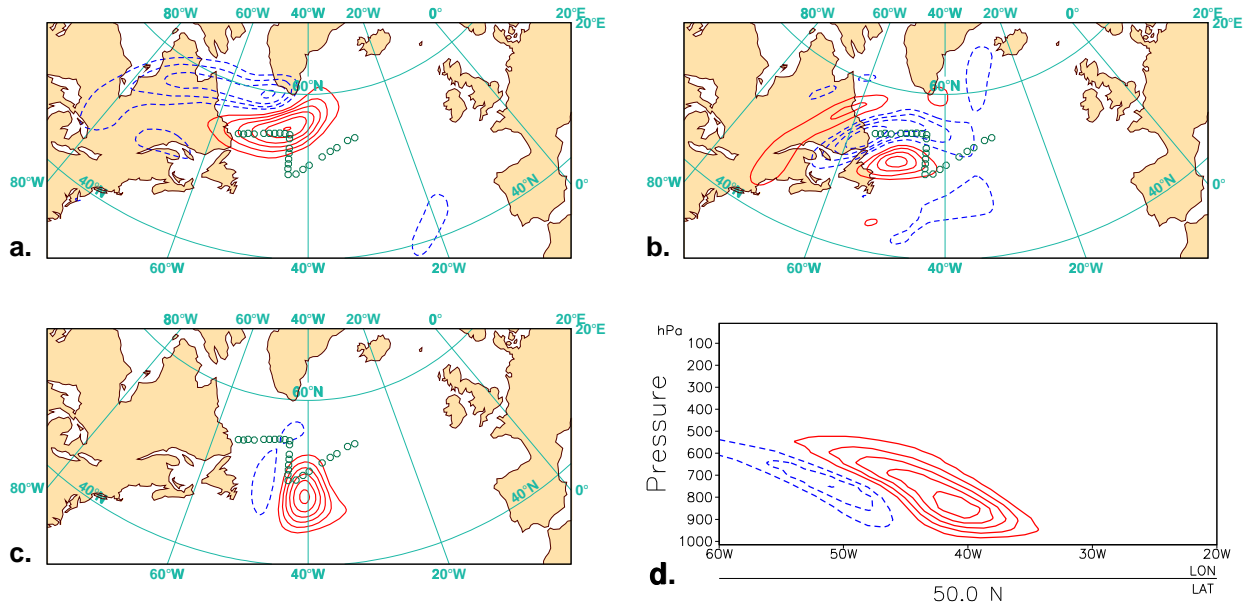


FIG. B.1: Structure sensible en température pour le cas de la POI18: 22 février 1997 à 12h TU. Les lignes continues (en tirets) marquent une sensibilité positive (négative) de la fonction coût entrophie. Les ronds positionnent les dropsondes du G-IV.

- (a.) à 300hPa;  $Max = 1.7 \times 10^{-5} K^{-1}.s^{-2}$ ,  $min = -1.14 \times 10^{-5} K^{-1}.s^{-2}$ , isoligne:  $2.8 \times 10^{-6} K^{-1}.s^{-2}$ .  
 (b.) à 550hPa;  $Max = 4.5 \times 10^{-5} K^{-1}.s^{-2}$ ,  $min = -4.9 \times 10^{-5} K^{-1}.s^{-2}$ , isoligne:  $1. \times 10^{-5} K^{-1}.s^{-2}$ .  
 (c.) à 850hPa;  $Max = 1.5 \times 10^{-4} K^{-1}.s^{-2}$ ,  $min = -4.5 \times 10^{-5} K^{-1}.s^{-2}$ , isoligne:  $2.5 \times 10^{-5} K^{-1}.s^{-2}$ .  
 (d.) Coupe verticale le long du 50° parallèle Nord; isoligne:  $1.1 \times 10^{-5} K^{-1}.s^{-2}$ .

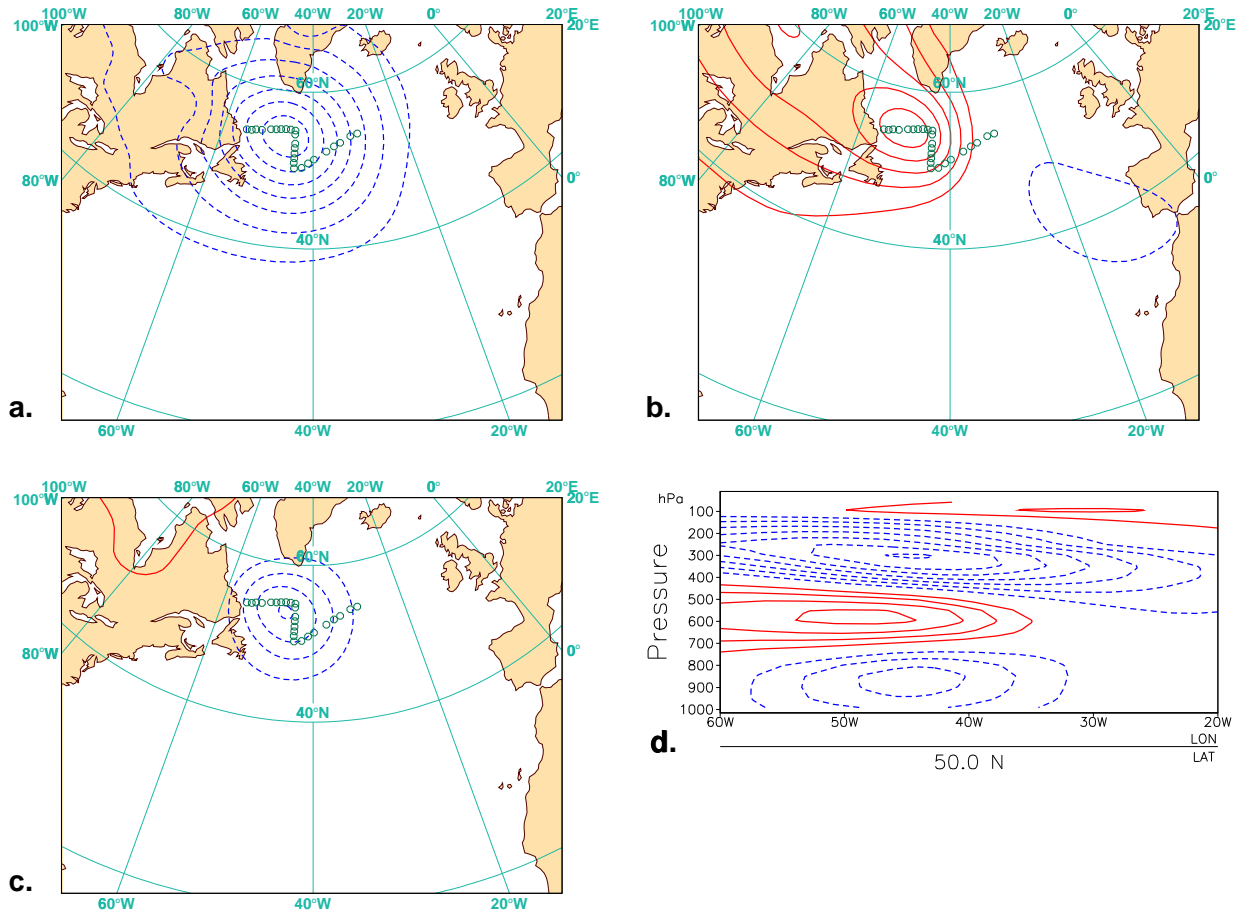
B.2.2 Le vecteur de *mise à jour* numéro 5

FIG. B.2: Coupe horizontale du 5<sup>e</sup> vecteur de mise à jour, en température pour le cas de la POI18: 22 février 1997 à 12h TU. Les contours continus (en tirets) représentent une structure positive (négative) de température. Les ronds positionnent les dropsondes du G-IV.

(a.) à 300 hPa;  $Max = 2.5 \times 10^{-2} K$ ,  $min = -3.8 \times 10^{-1}$ , isoligne:  $5. \times 10^{-2} K$ .

(b.) à 550 hPa;  $Max = 2.8 \times 10^{-1} K$ ,  $min = -6.3 \times 10^{-2} K$ , isoligne:  $5. \times 10^{-2} K$ .

(c.) à 850 hPa;  $Max = 7. \times 10^{-2} K$ ,  $min = -2. \times 10^{-1} K$ , isoligne:  $5. \times 10^{-2} K$ .

(d.) Coupe verticale le long du 50° parallèle Nord; isoligne:  $3.3 \times 10^{-2} K$ .

Sur la figure (B.2) il apparaît très nettement que le 5<sup>e</sup> vecteur de *mise à jour* est co-localisé avec les observations qui sont elles-mêmes bien positionnées dans la zone sensible (cf. figure B.1). Ceci explique la forte contribution de ce vecteur à la décroissance de  $Var(\delta\mathcal{J})$  sur la figure (3.15).



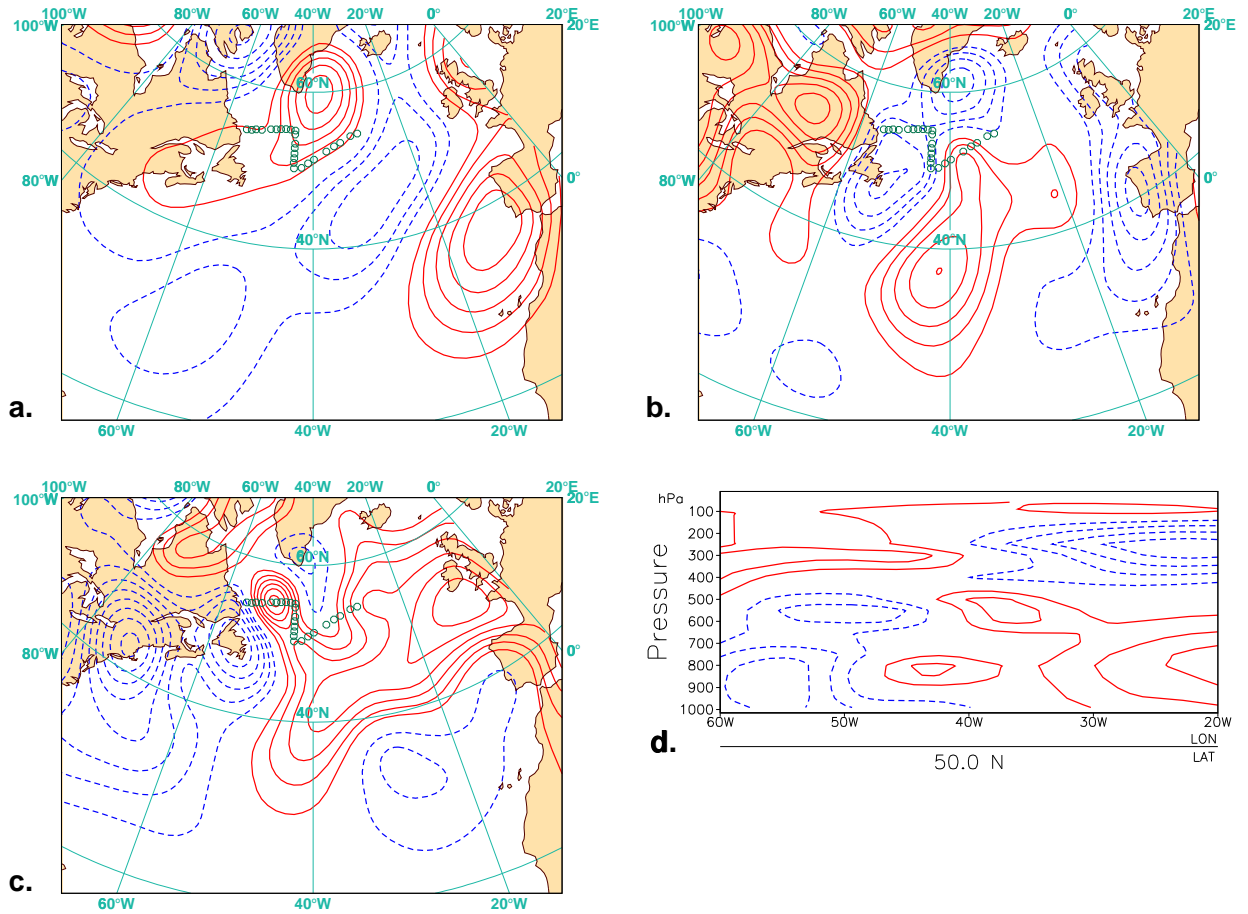
B.2.3 Le vecteur de *mise à jour* numéro 200

FIG. B.3: Coupe horizontale du 200<sup>e</sup> vecteur de mise à jour, en température pour le cas de la POI18: 22 février 1997 à 12h TU. Mêmes signifiants graphiques que pour les figures (B.2).

(a.) à 300 hPa;  $Max = 1.3 \times 10^{-1} K$ ,  $min = -1.2 \times 10^{-1} K$ , isoligne:  $2. \times 10^{-2} K$ .

(b.) à 550 hPa;  $Max = 6.4 \times 10^{-2} K$ ,  $min = -5. \times 10^{-2} K$ , isoligne:  $1. \times 10^{-2} K$ .

(c.) à 850 hPa;  $Max = 7. \times 10^{-2} K$ ,  $min = -8.9 \times 10^{-2} K$ , isoligne:  $1. \times 10^{-2} K$ .

(d.) Coupe verticale le long du 50° parallèle nord; isoligne:  $1.5 \times 10^{-2} K$ .



# Annexe C

## Notations

Les différentes notations utilisées dans ce manuscrit sont regroupées dans les thèmes suivants :

- Scalaires
- Fonctions
- Vecteurs d'état du modèle et incréments (dimension  $n$ ).
- Autres vecteurs de dimension  $n$ .
- Vecteurs des observations et autres vecteurs de dimension  $m$ .
- Vecteurs de sensibilité
- Opérateurs et matrices
  - Opérateurs de prévision
  - Opérateurs et matrices d'assimilation
  - Matrices diverses

### C.1 Variables scalaires

Notation	Définition	Référence
$t_i$	Instant indexé $i$ , où $i$ peut être 0, 1, $N$ ou $f$	
$N_{y_t}$	Nombre d'observations constituant le réseau ciblé	éq. (5.3)
$N_A$	Nombre de vecteurs de <i>mise à jour</i> entrant dans la constitution de $\mathbf{A}$	partie 3.4.2-b.
$\mathfrak{R}_i$	Coefficient de convergence de $\mathbf{A}_i$ pour $i$ vecteurs de <i>mise à jour</i>	éq. (3.27)
$\mathfrak{G}_i$	Gain de convergence de $\mathbf{A}_i$	éq. (3.28)
$\mathbf{T}_1$	Scalaire résultant du test du gradient	éq. (3.33)
$\mathbf{T}_2$	Scalaire résultant du test de l'adjoint	éq. (3.31)

## C.2 Fonctions

Notation	Signification	Domaine de définition	Référence
$J()$	Fonction objective du variationnel	$\mathbf{x}$ ou $\delta\mathbf{x}$	éq. (2.79)
$J_o()$	Partie de la fonction objective du variationnel dédiée aux observations	$\mathbf{x}$ ou $\delta\mathbf{x}$	éq. (2.79)
$J_b()$	Partie de la fonction objective du variationnel dédiée à l'ébauche	$\mathbf{x}$ ou $\delta\mathbf{x}$	éq. (2.79)
$\mathcal{J}$	Fonction coût définie sur un état de l'atmosphère	$\mathbf{x}$	éq. (2.13)
$\mathcal{S}$	Fonction de score définie sur $\mathcal{J}$	réels	éq. (6.1)

## C.3 Vecteurs d'état du modèle et incréments de dimension $n$

Notation	Signification	Référence
$\mathbf{x}$	Vecteur d'état dans le modèle	
$\mathbf{x}_i$	Vecteur d'état à l'instant $i$ , où $i$ peut être $0, 1, k-1, k$ ou $k+1, \dots$	éq. (2.1)
$\chi$	Variable de contrôle de l'assimilation	éq. (A.8)
$\mathbf{x}^t$	Vecteur d'état représentant la réalité	éq. (2.90)
$\mathbf{x}^a$	Vecteur d'état de l'analyse	
$\mathbf{x}_i^a$	Vecteur d'état de l'analyse défini à l'instant $i$ qui peut être $0, k-1, k$ ou $k+1$	éq. (2.26)
$\mathbf{x}^b$	Vecteur de l'ébauche	
$\mathbf{x}_i^b$	Vecteur de l'ébauche à l'instant $i$ qui peut être $0, k-1, k$ ou $k+1$	éq. (2.26)
$\mathbf{x}^f$	Vecteur de la prévision	
$\mathbf{x}_i^f$	Vecteur de la prévision à l'instant $i$ qui peut être $k$ ou $k+1$	éq. (2.1)
$\mathbf{x}'^f$	Vecteur de la prévision perturbée par une modification de son état initial	éq. (??)
$\delta\mathbf{x}_i$	Perturbation de $\mathbf{x}_i$ ou incrément	éq. (2.85)
$\delta\mathbf{z}(t_i)$	Perturbation du vecteur d'état $\mathbf{z}(t_i)$	éq. (2.5)
$\delta\mathbf{x}^a$	Incrément d'analyse $\mathbf{x}^a$	éq. (2.30)
$\delta\mathbf{x}^b$	Perturbation de $\mathbf{x}^b$	éq. (2.31)
$\delta\mathbf{x}^f$	Perturbation de $\mathbf{x}^f$	éq. (2.2e)

## C.4 Autres vecteurs de dimension $n$

Notation	Signification	Référence
$\zeta^b$	Erreur d'estimation de la réalité par l'ébauche	éq. (2.25)
$\sigma_b$	Écart-type de l'erreur de l'ébauche	éq. (3.22)
$\zeta^a$	Erreur d'estimation de la réalité par l'analyse	éq. (2.46)
$\mathbf{v}_i$	Vecteur de <i>mise à jour</i> n° $i$ utilisé pour calculer $\mathbf{A}$	éq. (A.13)
$\mathbf{w}_i$	Vecteur d'approximation de $\nabla\nabla J$	éq. (A.6)
$\mathbf{c}$	Projection de la matrice $\mathbf{A}$ sur $\nabla_x \mathcal{J}$ ( $\mathbf{c} = \mathbf{A}\nabla_x \mathcal{J}$ )	éq. (3.3)
$\mathbf{c}_k$	$\mathbf{c}$ défini pour la matrice $\mathbf{A}_k$ où $k$ donne un type de réseau d'observation utilisé: $k = t$ - réseau ciblé $k = c$ - réseau conventionnel $k = ct$ - réseau total	éq. (5.1)
$\mathcal{J}\mathcal{C}_t$	Vecteur des composantes des contributions des observations ciblées à l'impact sur la variation de $\mathcal{J}$	éq. (5.4)

## C.5 Vecteurs d'observations et autres vecteurs de dimension $m$

Notation	Signification	Référence
$\mathbf{y}^o$	Vecteur d'observation	éq. (2.49)
$\mathbf{y}_i^o$	Vecteur d'observation défini à l'instant $i$	éq. (2.23)
$\mathbf{y}_k^o$	Vecteur d'observation du réseau $k$ $k = t$ - réseau ciblé $k = c$ - réseau conventionnel $k = ct$ - réseau total	éq. (2.49) éq. (2.49) éq. (2.49)
$\mathbf{y}'$	Vecteur d'observation perturbé	partie 2.2.1
$\delta\mathbf{y}$	Perturbation du vecteur d'observation	
$\delta\mathbf{y}_i$	Perturbation du vecteur d'observation $\mathbf{y}_i^o$	éq. (2.30)
$\delta\mathbf{y}_k$	Perturbation du vecteur d'observation $\mathbf{y}_k^o$	éq. (5.2)
$\mathbf{d}$	Vecteur d'innovation (écart entre observation et ébauche)	éq. (3.25)
$\mathbf{d}(t_i)$	Vecteur d'innovation à l'instant $i$	éq.(2.86)
$\mathbf{d}_k$	Vecteur d'innovation pour le réseau $k$ $k = t$ - réseau ciblé $k = c$ - réseau conventionnel $k = ct$ - réseau total	partie 3.4.3 partie 3.4.3
$\varepsilon$	Erreur de mesure de la réalité par une observation	éq. (2.23)
$\sigma_o$	Écart-type de l'erreur d'observation	éq. (3.22)

## C.6 Vecteurs de gradient et sensibilité

Notation	Définition	Référence	Dimension
$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}$	Sensibilité de $\mathcal{J}$ à $\mathbf{x}$ où $\mathbf{x}$ peut être $\mathbf{x}^b$ ou $\mathbf{x}_0$	éq. (3.33) partie 6.3.2	$n$
$\nabla_{\mathbf{x}(t_i)} \mathcal{J}$	Sensibilité de $\mathcal{J}$ à $\mathbf{x}(t_i)$	éq. (2.19)	$n$
$\nabla_{\mathbf{x}^a} \mathcal{J}$	Sensibilité de $\mathcal{J}$ à $\mathbf{x}^a$	éq. (2.37)	$n$
$\nabla_{\mathbf{x}^b} \mathcal{J}$	Sensibilité de $\mathcal{J}$ à $\mathbf{x}^b$	éq. (2.40)	$n$
$\nabla_{\mathbf{y}^o} \mathcal{J}$	Sensibilité de $\mathcal{J}$ aux observations $\mathbf{y}^o$	éq. (2.38)	$p$
$\nabla_{\mathbf{y}_t} \mathcal{J}$	Sensibilité de $\mathcal{J}$ aux observations ciblées $\mathbf{y}_t$	éq. (2.52)	$N_{\mathbf{y}_t}$
$\nabla J$	Gradient de la fonction objective du variationnel ( $J$ ) par rapport à $\mathbf{x}$ ou $\delta \mathbf{x}$	éq. (2.87)	$n$
$\nabla J_o$	Gradient de la fonction $J_o$	éq. (3.17)	$n$

## C.7 Opérateurs et matrices

### C.7.1 Opérateurs de prévision

Notation	Signification	Référence	Dimensions <sup>◊</sup>
$M$	Modèle de prévision	éq. (2.1)	◊
$\mathbf{M}$	Modèle linéaire tangent de $M$	éq. (2.2)	$n \times n$
$\mathbf{M}^T$ ou $\mathbf{M}^*$	Modèle linéaire adjoint de $\mathbf{M}$	éq. (2.5)	$n \times n$

◊ on ne précise pas la dimension des opérateurs non-linéaires qui ne peuvent s'exprimer par une matrice.

## C.7.2 Opérateurs et matrice d'assimilation

Notation	Signification	Référence	Dimensions <sup>◊</sup>
<b>A</b>	Matrice de variance-covariances des erreurs d'analyse	éq. (2.46)	$n \times n$
<b>A<sub>k</sub></b>	Matrice <b>A</b> spécifiée pour le réseau $k$ $k = t$ : réseau ciblé $k = c$ : réseau conventionnel	éq. (2.52)	$n \times n$
<b>B</b>	Matrice de variance-covariances des erreurs de l'ébauche	éq. (2.25)	$n \times n$
<b>K</b>	Gain de l'assimilation dans la formulation du BLUE	éq. (2.27)	$n \times n$
<b>K<sup>T</sup></b>	Opérateur adjoint de <b>K</b>	éq. (2.42)	$n \times n$
<b>R</b>	Matrice de variance-covariances des erreurs des erreurs d'observation	éq. (2.24)	$p \times p$
<b>R<sub>k</sub></b>	Matrice <b>R</b> spécifiée pour le réseau $k$ $k = t$ : réseau ciblé $k = c$ : réseau conventionnel	éq. (2.51)	$p_k \times p_k$
<b>H</b>	Opérateur d'observation non-linéaire	éq. (2.23)	◊
<b>H</b>	Opérateur d'observation linéarisé	éq. (2.27)	$n \times p$
<b>H<sub>k</sub></b>	Opérateur d'observation pour le réseau $k$	éq. (2.50)	$n \times p_k$
<b>H<sup>T</sup></b>	Opérateur d'observation adjoint de <b>H</b>	éq. (2.27)	$p \times n$
<b>h</b>	Opérateur linéaire d'une observation unique	éq. (3.22)	$n \times 1$
<b>h<sup>T</sup></b>	Opérateur adjoint d'une observation unique	éq. (3.22)	$1 \times n$

◊ on ne précise pas la dimension des opérateurs non-linéaires qui ne peuvent s'exprimer par une matrice.

## C.7.3 Matrices diverses

Notation	Signification	Référence	Dimensions
$\nabla\nabla J$	Hessienne de la fonction objective $J$ du variationnel	éq. (2.88)	$n \times n$
$\mathcal{L}$	Opérateur de changement de variable dans le variationnel ( $\mathbf{x} \rightarrow \chi$ )	éq. (3.2)	$n \times n$
$\mathcal{N}_i$	Opérateur de norme défini à l'instant $t_i$	éq. (2.4)	$n \times n$
$\mathcal{E}$	Matrice diagonale de norme de l'énergie totale	éq. (2.11)	$n \times n$
$\Xi$	Matrice diagonale de norme de l'enstrophie de l'enstrophie	éq. (2.12)	$n \times n$





# Annexe D

## Acronymes

Liste des acronymes utilisés dans le présent manuscrit.

### D.1 Acronymes du système d'observation

**AIREP** Type d'observation regroupant les mesures effectuées par la flotte d'aéronefs commerciaux. Ce type regroupe des observations de vent et de température manuelles (selon l'équipement de l'appareil) ou automatiques effectuées lors des phases d'ascension et de descente (pour reconstituer des profils verticaux) ainsi que pendant les phases de croisière.

**DRIBU** Observations de surface effectuées par les bouées dérivantes ou ancrées.

**PILOT** Type d'observation regroupant des mesures de vent effectuées par diverses techniques de sondage ascensionnel. Les PILOT au théodolite sont devenus rares en Europe et sur le continent Nord Américain. La plupart des données PILOT y sont dérivées des sondages de TEMP et rassemblent les données de vent surnuméraires (hors points caractéristiques et niveaux verticaux standards).

**SATOB** Observations de vent satellitaires déduites des images de satellites géostationnaires par suivi de la course des nuages.

**SYNOP** Type d'observation regroupant les observations de surface prises soit par des stations terrestres automatiques ou non, ou encore par des navires sélectionnés.

**TEMP** Type d'observation désignant des mesures effectuées par sondage. On y trouve les radiosondages classiques depuis des stations terrestres ou depuis des navires. Les dropsondes utilisées durant FASTEX font partie de ce groupe. Les mesures effectuées échantillonnent température, vent, humidité et pression. On ne conserve que celles coïncidant avec les niveaux verticaux standards et les mesures décrivant les points caractéristiques du profil vertical.

**TOVS** Type regroupant les mesures des satellites défilants de la NOAA (**T**iros-**N** **O**perational **V**ertical **S**ounder). Il s'agit de mesures de radiances.

## D.2 Acronymes de l'assimilation

**BLUE** **B**est **L**inear **U**nbiased **E**stimate. Meilleure estimation linéaire non biaisée de l'état réel d'un système (cf. équation 2.26).

**3D-Var** Algorithme variationnel d'assimilation tridimensionnelle. Les trois dimensions sont spatiales (pour l'interpolation entre observations et modèle), toutes les observations sont considérées contemporaines de l'instant d'assimilation.

**4D-Var** Algorithme variationnel d'assimilation quadri-dimensionnelle. Les quatre dimensions sont spatiales et temporelle. Les observations sont comparées à l'état du modèle à l'instant de la mesure, ce qui nécessite l'emploi des modèles de prévision linéaires tangent et adjoint (dans la version incrémentale du 4D-Var).

## D.3 Acronymes nominatifs

**AMDAR** **A**utomated **M**eteorological **D**ata **A**quisition **R**eport

**ARPEGE** **A**ction de **R**echerche **P**etite **E**chelle **G**rande **E**chelle. Modèle de Météo-France.

**ASAP** **A**utomated **S**hip **A**tmospheric **P**rogram

**EUCOS** **E**Uropean **C**omposite **O**bserving **S**ystem

**EUMETNET** **E**Uropean **M**ETEorological **N**ETwork

**FASTEX** **F**ront and **A**tlantic **S**torm **T**rack **E**Xperiment  
(Expérience sur le Rail des Dépressions Atlantique et les Fronts)

**IASI** **I**nfrared **A**tmospheric **S**ounding **I**nterferometer

**NOAA** **N**ational **O**ceanic and **A**tmopsheric **A**dministration

**NORPEX** **N**ORthern **P**acific **E**Xperiment

**NRL** **N**aval **R**esearch **L**aboratory

**THORPEX** **T**he **H**emispheric **O**bserving-System **R**esearch and **P**redictability **E**Xperiment

**WSRP** **W**inter **S**torm **R**esearch **P**rogram

## D.4 Acronymes divers

<b>CI</b>	<b>C</b> onditions <b>I</b> nitiales	<b>G-IV</b>	<b>G</b> ulfstream <b>I</b> V (avion de la NOAA)
<b>TU</b>	<b>T</b> emps <b>U</b> niversel	<b>POI</b>	<b>P</b> ériode d' <b>O</b> bservation <b>I</b> ntensive



# ÉTUDE DE L'OPTIMISATION D'UN SYSTÈME D'OBSERVATION ADAPTATIF POUR AMÉLIORER LA PRÉVISION DES DÉPRESSIONS MÉTÉOROLOGIQUES

## Mots-clefs

Observation adaptative, méthode adjointe, assimilation variationnelle, sensibilité aux observations, optimisation du système d'observation, Kalman Filter Sensitivity, FASTEX

## Résumé

La prévision des cyclogenèses rapides par des modèles numériques reste un problème délicat, même à courte échéance (1-2 jours). Pour répondre à ce problème compté parmi les thèmes de recherche et objectifs scientifiques de la campagne FASTEX, le ciblage des observations doit améliorer la description de l'état initial des prévisions grâce au déploiement d'observations supplémentaires. La campagne FASTEX fut la première mise en œuvre expérimentale du ciblage au cours de laquelle les observations ciblées ont été déployées sur des zones géographiques dites sensibles calculées à l'avance. Les zones sensibles de FASTEX, calculées avec les techniques issues des modèles linéaire et adjoint d'un modèle de prévision numérique, prennent en compte les propriétés dynamiques de l'atmosphère.

Cependant, l'efficacité du ciblage dépend beaucoup du système d'assimilation des données utilisé. Afin de reformuler une technique de ciblage utilisant le modèle adjoint, on a développé une approche dite de sensibilité aux observations. Ce calcul linéaire tient compte des caractéristiques de toutes les observations en présence et de la façon dont elles vont être assimilées. La formulation de la sensibilité d'un aspect de la prévision aux observations est basée sur le calcul de l'adjoint de l'opérateur d'assimilation auquel est combiné un calcul avec l'adjoint de la prévision. Cette technique a été développée dans un cadre quasi opérationnel avec l'algorithme 3D-Var d'ARPEGE.

La sensibilité aux observations permet, dans un contexte diagnostique, d'étudier de façon critique les déploiements d'observations adaptatives effectués durant la campagne FASTEX. Sur l'exemple de la POI17, l'étude de l'interaction des différents types d'observations qui interviennent dans l'assimilation (données conventionnelles et données ciblées) met en évidence des mécanismes complexes. Ces résultats éclairent le fonctionnement de l'impact des observations ciblées dans le système d'assimilation-prévision, ainsi que l'importance des valeurs observées pour l'impact final d'un jeu d'observations, qui explique l'effet parfois décevant de certains vols de FASTEX. L'adjoint du système d'assimilation permet aussi de détecter des utilisations non optimales des observations ciblées dans le système 3D-Var. Le cas de la POI18 sert d'illustration pour une telle mise en œuvre de l'outil de la sensibilité aux observations. Cet outil révèle entre autres, la rusticité de la formulation des statistiques d'erreur de l'ébauche et d'observation modélisées pour ces données.

Ces résultats ont permis de proposer une nouvelle approche du ciblage dans un cadre pronostique. Cette approche est basée sur une simulation de la réduction de la variance d'erreur de prévision dans une direction instable. Cette technique prend en compte à la fois la dynamique de l'atmosphère, le système d'assimilation et les erreurs dans les conditions initiales (au sens statistique). Cette étude tend à définir une approche optimale du ciblage au sens où celui-ci maximise l'efficacité des observations additionnelles utilisées sous des contraintes pré-définies. Même si la vaste question de l'optimisation du ciblage reste trop ardue avec les outils d'investigation actuels, différentes techniques sub-optimales ont été proposées.

On a ainsi défini différentes stratégies de sélection de déploiements alternatifs qui ont été testées sur des situations de FASTEX. On montre ainsi la faisabilité de ces approches qui ouvrent la voie vers une formulation de techniques de ciblage plus optimales.